4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

Ανισώσεις 1ου Βαθμού

● $αx + β > 0 \Leftrightarrow αx > -β$

● Αν $α > 0$, τότε $x > -\frac{β}{α}$

● Αν $α < 0$, τότε $x < -\frac{β}{α}$

● Αν $α = 0$, τότε έχουμε $0x > -β$, για $β > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για $β < 0$ είναι αδύνατη

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

● αν $|x - x_o| < ρ$, τότε $x_o - ρ < x < x_o + ρ$

● αν $|x - x_o| > ρ$, τότε $x < x_o - ρ$ ή $x > x_o + ρ$

Ερωτήσεις κατανόησης

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις Σωστό (Σ), Λάθος(Λ)

1. Η ανίσωση $αx + β > 0$ έχει λύση την $x = 0$ για $β > 0$ Σ ☐ Λ ☐
2. Η ανίσωση $α^2x + β > 0$ έχει λύσεις τιμές του $x > -\frac{β}{α}$ Σ ☐ Λ ☐
3. Η ανίσωση $(λ - 2)x + 10 < 0$ είναι αδύνατη για $λ = 2$ Σ ☐ Λ ☐
4. Η ανίσωση $|x| < 1$ έχει λύσεις $x \in [-1,1]$ Σ ☐ Λ ☐
5. Η ανίσωση $0x > -4$ είναι αδύνατη Σ ☐ Λ ☐
6. Η ανίσωση $0x \geq 0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό Σ ☐ Λ ☐
7. Η ανίσωση $|x - 2| > x - 2$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό Σ ☐ Λ ☐
8. Η ανίσωση $|x - 2| + 2 > 0$ είναι αδύνατη Σ ☐ Λ ☐
9. Η ανίσωση $|x - 2| + 1 < 0$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό Σ ☐ Λ ☐
10. Αν $|x| > 2$, τότε $x \in (2, +\infty)$ Σ ☐ Λ ☐

Β. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Οι λύσεις της ανίσωσης: $|x - 3| \leq 0$ είναι

α) $x = 3$ β) $x > 3$ γ) $x < 3$ δ) $x \geq 3$

2. Αν ισχύει $2 \leq 2x + 4 < 10$, τότε οι δυνατές τιμές του αριθμού x είναι:

α) $-1 < x < 2$ β) $-1 \leq x < 3$ γ) $-1 < x \leq 3$ δ) $-1 \leq x \leq 3$

3. Αν ισχύει $|x| \leq x$, τότε για αριθμό x έχουμε:

α) $x > 0$ β) $x < 0$ γ) $x \in \mathbb{R}$ δ) $x \geq 0$

4. Η ανίσωση $(\lambda - 2)x < \lambda - 5$ είναι αδύνατη όταν:

α) $\lambda = 2$ β) $\lambda > 2$ γ) $\lambda < 2$ δ) $\lambda < 0$

5. Οι λύσεις της εξίσωσης $|x - 5| = x – 5$ ειναι:

α) $x \in \mathbb{R}$ β) $x \geq 5$ γ) $x = 5$ ή $x = -5$ δ) $x < 5$

6. Οι λύσεις της εξίσωσης $|x - 2| + |x - 4| = 2$ είναι:

α) $x < 2$ β) $2 \leq x \leq 4$ γ) $2 < x < 4$ δ) $x > 4$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε την ανίσωση για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda(x - 2) > 2x + 3\lambda$

Λύση

Έχουμε $\lambda(x - 2) + 4 > 2x + 3\lambda \Leftrightarrow \lambda x - 2\lambda + 4 > 2x + 3\lambda \Leftrightarrow \lambda x - 2x > 3\lambda - 4 \Leftrightarrow (\lambda - 2)x > 3\lambda - 4$ (1)

Για $\lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2$ έχουμε $x > \frac{3\lambda - 4}{\lambda - 2}$

Για $\lambda - 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$ έχουμε $x < \frac{3\lambda - 4}{\lambda - 2}$

Για $\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$, τότε από (1) προκύπτει $(2 - 2)x > 6 - 4 \Leftrightarrow 0 > 2$ αδύνατη

2. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $|x - 3| < 6$ ii) $|2x + 1| > 7$ iii) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 10$

Λύση

i) Έχουμε $|x - 3| < 6 \Leftrightarrow -6 < x - 3 < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 6$ ή $x \in (-3, 6)$

ii) Έχουμε $|2x + 1| > 7 \Leftrightarrow 2x + 1 > 7$ ή $2x + 1 < -7 \Leftrightarrow 2x > 6$ ή $2x < -8 \Leftrightarrow x > 3$ ή $x < -4$

άρα $x \in (-\infty, -4) \cup (3, +\infty)$

iii) Έχουμε $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} \leq 10 \Leftrightarrow |x - 3| \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq x - 3 \leq 10 \Leftrightarrow$

$-7 \leq x \leq 13$, άρα $x \in [-7,13]$.

3. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$2(x - 1) + 3(x + 2) > 9$ και $\frac{x-2}{3} > \frac{x-4}{2} + 1$

Λύση

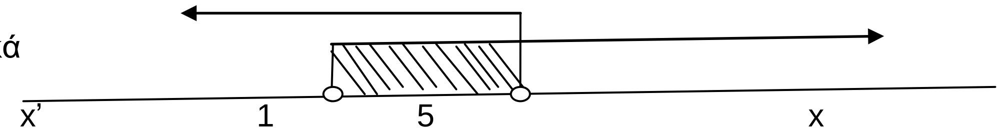
● Από την 1η ανίσωση έχουμε $2x - 2 + 3x + 6 > 9 \Leftrightarrow 5x > 5 \Leftrightarrow x > 1$

● Από την 2η ανίσωση έχουμε $6\,\frac{x-2}{3} > 6\,\frac{x-5}{2} + 1 \Leftrightarrow 2(x - 2) > 3(x - 5) + 6 \Leftrightarrow$

$2x - 4 > 3x - 15 + 6 \Leftrightarrow 2x - 3x > -15 + 10 \Leftrightarrow -x > -5 \Leftrightarrow x < 5$

Άρα $x > 1$ και $x < 5$, οπότε $1 < x < 5$ ή $x \in (1,5)$

Γραφικά



4. Να λύσετε την ανίσωση: $|6 - |x - 2|| \geq 4$

Λύση

Έχουμε $6 - |x - 2| \geq 4$ ή $6 - |x - 2| \leq -4$

Από 1η προκύπτει $|x - 2| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$, άρα $x \in [0,4]$ (1)

Από 2η προκύπτει $|x - 2| \geq 10 \Leftrightarrow x - 2 \geq 10$ ή $x - 2 \leq -10 \Leftrightarrow x \geq 12$ ή $x \leq -8$ (2)

Από (1), (2) παρατηρώ έχουμε $x \in (-\infty, -8] \cup [0,4] \cup [12, +\infty)$

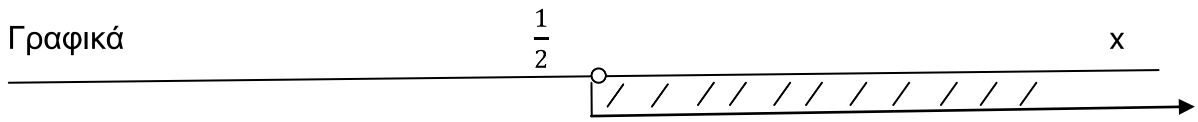
5. Να λύσετε την ανίσωση: $(x + 2)^2 > (x - 3)^2 - 4(x - 1)$

Λύση

Έχουμε $x^2 + 4x + 4 > x^2 - 6x + 9 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x - x^2 + 6x + 4x > 4 - 4 + 9 \Leftrightarrow$

$18x > 9 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ ή $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$

Γραφικά



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\frac{x+1}{2} - \frac{2x+3}{5} > \frac{x+5}{4}$ ii) $\frac{x-1}{3} < \frac{x}{6} + \frac{x-2}{2}$ iii) $\frac{x-2}{2} + \frac{1-2x}{5} < \frac{x}{10} - \frac{2}{5}$

2. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $(x - 2)^2 - 2x + 10 < (3 - x)^2$ ii) $x(x + 1) + x(x + 3) < (2x + 1)(x - 5)$

iii) $x + \frac{1-3x}{4} - [1 - 2(x - \frac{x+3}{5})] > 5x - 2$ iv) $\frac{x+4}{6} + 2 > \frac{1}{2}(\frac{x}{2} - 1 + \frac{x-2}{3})$

3. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των:

i) $\frac{3x-1}{3} < \frac{5x+1}{5}$ και $\frac{7x}{3} \geq 2(x + 1)$ ii) $\frac{7-6x}{2} + 10x < \frac{8x+1}{3} - 12$ και $\frac{x+1}{2} > 2x - \frac{5}{2}$

4. Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς για τους οποίους αληθεύουν οι ανισώσεις:

i) $(x - 2)\sqrt{2} < x - 1$ ii) $2(x - 1) + 3(x - 2) < 11$

5. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $-2x \leq 3x + 5 < x - 1$ ii) $\frac{2x}{3} \leq \frac{7+6x}{2} \leq \frac{5x-1}{4}$

6. Να λυθούν για τις διάφορες τιμές των λ, μ οι ανισώσεις:

i) $3(\lambda x - 1) + 2(2\lambda - x) > 0$ ii) $\frac{\lambda x}{3} - \frac{1}{8} > \frac{(2\lambda+1)x}{2} + \frac{1}{4}$

iii) $\lambda(x - 2) > \mu(x + 1) - 5 + x$ iv) $\frac{x}{\lambda} - \frac{3x-1}{2} > \frac{2+x}{4\lambda}$

7. Ποιά σχέση υπάρχει μεταξύ λ, μ, ώστε οι λύσεις της ανίσωσης $(\lambda - \mu)x + (\lambda + 2\mu)(1 - x) < 0$ να είναι μικρότερες του 3

8. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

i) $|x + 3| < 4$ και $|x - 1| \leq 2$ ii) $|2x - 3| > 5$ και $|x + 2| > 3$

9. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $|x + 3| \geq |x - 1|$ ii) $|3x + 1| \leq 3|x - 2|$ iii) $|x + 2| \geq 3x + 4$

iv) $|x - 2| + |x - 4| > 5$ v) $|x + 6| - |x + 1| < x + 10$ vi) $\frac{|x-1|}{2} + \frac{3|x-1|}{4} > \frac{1}{3}$

10. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $|2 - |x - 1|| < 6$ ii) $|4 + |x + 1|| > 6$ iii) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} > 3$

11. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $4 \leq \sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 8$ ii) $3|x - 2| - |x^2 - 2x| \leq 0$ iii) $d(x, -3) + |x| > 5$

12. Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία η εξίσωση $(\lambda + 1)x = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ έχει μοναδική λύση μεγαλύτερη του 4.

13. Να βρεθεί η τιμή του λ, ώστε η ανίσωση $\lambda x \leq 4\lambda^2 - 5\lambda$ να έχει σύνολο λύσεων το διάστημα $[-9, +\infty)$.

14. Να βρείτε το φυσικό αριθμό που είναι μεταξύ 131 και 155 που όταν διαιρεθεί με 14 αφήνει υπόλοιπο 5.

15. Να βρείτε το μικρότερο φυσικό αριθμό του οποίου το διπλάσιο αυξημένο κατά 3 δεν υπερβαίνει το μισό του αριθμού αυξημένο κατά 6.

16. Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς - 4 και 10 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;

ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x - 10| < |x + 4|$ και να βρείτε τις λύσεις της.

iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το συμπέρασμά σας

ΤΕΣΤ 1ο

Α. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί η ανίσωση:

$$(\lambda - 2)x \leq \lambda^2 - 2\lambda$$

Β. Να λυθεί η ανίσωση:

$$2 < |x - 3| < 4$$

Γ. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$|x - 4| + |x - 1| > 2 \quad \text{και} \quad 2|x - 1| - |x^2 - x| \geq 0$$

ΤΕΣΤ 2ο

Α. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί η ανίσωση:

$$(\lambda + 2)x \geq \lambda^2 - 4$$

Β. Να λυθεί η ανίσωση:

$$||x - 2| - 3| > 4$$

Γ. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{|x-1|}{2} + \frac{3|x-1|}{4} > \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad (2x + 3)^2 < (4x + 1)(x - 3) + 4$$

4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

Μορφές Τριωνύμου

● Η παράσταση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ λέγεται τριώνυμο 2ου βαθμού

Αν Δ η διακρίνουσα της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, τότε λέγεται και διακρίνουσα του τριωνύμου

Οι ρίζες της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, x_1, x_2 ονομάζονται ρίζες του τριωνύμου

● Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ μετασχηματίζεται στη μορφή:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$$

● Αν $\Delta > 0$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$

● Αν $\Delta = 0$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$

● Αν $\Delta > 0$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$

Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ γίνεται:

● Αν $\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$		Ομόσημο του α	0	Ετερόσημο του α	0	Ομόσημο του α	

● Αν $\Delta = 0$

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$		Ομόσημο του α	0	Ομόσημο του α	

● Αν $\Delta < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$		Ομόσημο του α	

Ερωτήσεις κατανόησης

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις Σωστό (Σ), Λάθος(Λ)

1. Αν Δ > 0 και α > 0, τότε το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$, γράφεται σαν άθροισμα τελείων τετραγώνων πολ/σμένο με α. Σ ☐ Λ ☐

2. Αν Δ = 0 και α > 0, τότε το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$, γράφεται σαν τέλειο τετράγωνο πολ/σμένο με α. Σ ☐ Λ ☐

3. Αν Δ < 0 και α < 0, τότε το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$, γράφεται σαν διαφορά τέλειων τετραγώνων πολ/σμένο με α.

4. Αν x_1, x_2 ρίζες του τριωνύμου, τότε $αx^2 + βx + γ = α(x - x_1)(x - x_2)$ Σ ☐ Λ ☐

5. Αν το τριώνυμο γράφεται $αx^2 + βx + γ = α(x - x_1)(x - x_2)$ με $x_1 \neq x_2$, τότε Δ > 0 Σ ☐ Λ ☐

6. Αν δυο τριώνυμα έχουν ίδιες ρίζες, τότε είναι ίσα Σ ☐ Λ ☐

7. Αν Δ < 0, τότε $αx^2 + βx + γ < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ ☐ Λ ☐

8. Αν Δ < 0, τότε $αx^2 + βx + γ$ διατηρεί πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ ☐ Λ ☐

9. Αν Δ < 0 και α > 0, τότε $αx^2 + βx + γ > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ ☐ Λ ☐

10. Αν Δ > 0 και α > 0, τότε $αx^2 + βx + γ > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ ☐ Λ ☐

11. Αν x_1, x_2 ρίζες του τριωνύμου, Δ > 0 και α > 0, τότε $α\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + β\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + γ > 0$ Σ ☐ Λ ☐

12. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x^2 + 2x + α \geq 0$, τότε $α \geq 1$ Σ ☐ Λ ☐

13. Τα τριώνυμα $x^2 + 2x + 5$ και $x^2 + 2|x| + 5$ έχουν το ίδιο πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ ☐ Λ ☐

14. Αν Δ < 0, τότε $αx^2 + βx + γ > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ ☐ Λ ☐

15. Τα τριώνυμα $x^2 + 6x + 5$ και $x^2 + 6|x| + 5$ έχουν το ίδιο πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Σ ☐ Λ ☐

16. Για τριώνυμο $(x + 2)^2 + 10$ ισχύει Δ < 0 Σ ☐ Λ ☐

17. Η ανίσωση $x^2 + x + κ^2 + 2 < 0$ είναι αδύνατη Σ ☐ Λ ☐

18. Αν x_1, x_2 ρίζες του $x^2 + βx + γ$, με $x_1 < x_2$, τότε $x^2 + βx + γ > 0$ στο $(x_2, +\infty)$ Σ ☐ Λ ☐

Β. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Το πλήθος των ακεραίων αριθμών που επαληθεύουν την ανίσωση $x^2 + 9 < 6x$ είναι:

   α) 0 β) 2 γ) 4 δ) 5

2. Το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$ είναι θετικό όταν:

   α) $Δ > 0$ και $α > 0$ β) $Δ < 0$ και $α > 0$ γ) $Δ > 0$ και $α < 0$ δ) $Δ < 0$ και $α < 0$

3. Η τιμή του τριώνυμου $x^2 - 6^{12}x$ για $x = -3$ είναι:

   α) θετική β) αρνητική γ) μηδέν

4. Η τιμή του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$ για $x = 2021$ είναι:

   α) θετική β) αρνητική γ) μηδέν

5. Αν $α > 0$ και $Δ < 0$, τότε η ανίσωση $αx^2 + βx + γ < 0$ αληθεύει:

   α) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ β) αδύνατη γ) για κάποια $x \in \mathbb{R}$

6. Αν η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου $αx^2 + βx + γ$ είναι μηδέν με x_0 ρίζα, τότε το τριώνυμο:

   α) ομόσημο του α, $x \in \mathbb{R}$ β) ετερόσημο του α, $x \in \mathbb{R}$ γ) ομόσημο του α, $x \in (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$

7. Το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$ έχει παραγοντοποιημένη μορφή:

   α) $2(x-1)(x-2)$ β) $2(x-1)(x+\frac{1}{2})$ γ) $2(x+1)(x-\frac{1}{2})$

8. Το τριώνυμο $αx^2 + βx - α$, $α \neq 0$ γράφεται σαν:

   α) τέλειο τετράγωνο β) άθροισμα τετραγώνων γ) διαφορά τετραγώνων

9. Το τριώνυμο $λ^2x + λx + 2$, $(λ \neq 0)$ έχει πρόσημο:

   α) θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ β) αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ γ) θετικό ή αρνητικό για $x \in \mathbb{R}$

10. Το τριώνυμο $4x^2 - 4x + 1$ έχει παραγοντοποιημένη μορφή:

    α) $(2x-1)(2x-1)$ β) $2(x-1)(x-1)$ γ) $2(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$

11. Ο αριθμός που επαληθεύει την σχέση $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ είναι:

    α) $x = -2$ β) $x = 2$ γ) $x = 0$

12. Η τιμή του τριωνύμου $(x-α)(x-β)$ για $x = \frac{α+β}{2}$ είναι:

    α) θετική β) αρνητική γ) μηδέν

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω τριώνυμα:

i) $x^2 - x - 20$ ii) $x^2 + 3x - 10$ iii) $2x^2 + x - 3$

Λύση

i) Το τριώνυμο $x^2 - x - 20$ έχει διακρίνουνα $Δ = (-1)^2 - 4(-20) = 81$ και ρίζες $x_1 = -4$, $x_2 = 5$ οπότε γράφεται $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$.

ii) Το τριώνυμο $x^2 + 3x - 10$ έχει διακρίνουνα $Δ = 3^2 - 4(-10) = 49$ και ρίζες $x_1 = 2$, $x_2 = -5$ οπότε γράφεται $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$.

iii) Το τριώνυμο $2x^2 + x - 3$ έχει διακρίνουνα $Δ = 1^2 - 4\cdot 2\cdot(-3) = 25$ και ρίζες $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ οπότε γράφεται $2(x - 1)(x + \frac{1}{2}) = (2x + 1)(x - 1)$

2. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

i) $A = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 6x - 7}$ ii) $B = \frac{-x^2 + x + 12}{x^2 + 5x + 6}$

Λύση

i) Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει διακρίνουσα $Δ = 4$ και ρίζες $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, οπότε γράφεται $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

Το τριώνυμο $x^2 + 6x - 7$ έχει διακρίνουσα $Δ = 64$ και ρίζες $x_1 = 1$, $x_2 = -7$, οπότε γράφεται $x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7)$

Οπότε η παράσταση έχει μορφή $A = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+7)} = \frac{x-3}{x+7}$

ii) Το τριώνυμο $-x^2 + x + 12$ έχει διακρίνουσα $Δ = 49$ και ρίζες $x_1 = 4$, $x_2 = -3$, οπότε γράφεται $-x^2 + x + 12 = -(x - 4)(x + 3)$

Το τριώνυμο $x^2 + 5x + 6$ έχει διακρίνουσα $Δ = 1$ και ρίζες $x_1 = -2$, $x_2 = -3$, οπότε γράφεται $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

Οπότε η παράσταση έχει μορφή $B = \frac{-(x-4)(x+3)}{(x+2)(x+3)} = \frac{-(x-4)}{x+2} = \frac{-x+4}{x+2}$

3. Να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $x^2 - 7x + 12$ ii) $-x^2 + 2x - 1$ iii) $3x^2 + 2x + 1$

Λύση

i) Το τριώνυμο $x^2 - 7x + 12$ έχει διακρίνουσα $Δ = 1$ και ρίζες $x_1 = 4$, $x_2 = 3$. Το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο του α εκτός των ριζών και ετερόσημο εντός των ριζών και φαίνεται στο παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2 - 7x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ii) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x - 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 0$ και ρίζα διπλή $x = 1$

Το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο του α και φαίνεται στο παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x^2 + 2x + 1$		$+$	0	$+$	

iii) Το τριώνυμο $3x^2 + 2x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, οπότε δεν έχει ρίζες.

Το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο του α και φαίνεται στο παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x^2 + 2x + 1$		$+$	

4. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 - 8x + 12 < 0$ ii) $-x^2 + x + 6 \leq 0$ iii) $x^2 - 7x - 8 > 0$

Λύση

i) Το τριώνυμο $x^2 - 8x + 12$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 16$ και ρίζες $x_1 = 2$, $x_2 = 6$. Το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο του α εκτός των ριζών και ετερόσημο εντός των ριζών και φαίνεται στο παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$x^2 - 8x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επιλέγω το διάστημα που το πρόσημο είναι αρνητικό, δηλαδή $x \in (2,6)$.

ii) Το τριώνυμο $-x^2 + x + 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 25$ και ρίζες $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Το πρόσημο του τριωνύμου είναι ομόσημο του α εκτός των ριζών και ετερόσημο εντός των ριζών και φαίνεται στο παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$-x^2 + x + 6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Επιλέγω το διάστημα που το πρόσημο είναι αρνητικό ή μηδέν. Δηλαδή $x \in (-\infty,-2] \cup [3,+\infty)$

5. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $15 < x^2 + 2x < 9x$

Λύση

Έχουμε δυο ανισώσεις $15 < x^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 > 0$ (1) και $x^2 + 2x < 9x \Leftrightarrow x^2 - 7x < 0$ (2)
Για την 1η έχουμε $\Delta = 64$ και ρίζες $x_1 = -5$, $x_2 = 3$. Για την 2η έχουμε $\Delta = 49$ και οι ρίζες $x_1 = 0$, $x_2 = 7$. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα πρόσημα και των δυο τριωνύμων.

x	$-\infty$		-5		0		3		7		$+\infty$
$x^2 + 2x - 15$		+	0	-		-	0	+		+	
$x^2 - 7x$		+		+	0	-		-	0	+	

● Παρατηρώ ότι $x^2 + 2x - 15 > 0$ για $x \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$
● Παρατηρώ ότι $x^2 - 7x < 0$ για $x \in (0,7)$

Άρα οι κοινές λύσεις βρίσκονται στο διάστημα (3,7).

6. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$x^2 + (\lambda - 3)x - (\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0$

Λύση

Το τριώνυμο $x^2 + (\lambda - 3)x - (\lambda^2 + 2\lambda - 3)$ έχει $\Delta = (\lambda - 3)^2 + 4(\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 5\lambda^2 + 2\lambda - 3$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $5\lambda^2 + 2\lambda - 3$, έχουμε Δ' = 64 και ρίζες $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{3}{5}$

Το πρόσημο του τριωνύμου $5\lambda^2 + 2\lambda - 3$ φαίνεται στο παρακάτω πίνακα:

λ	$-\infty$		-1		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
$5\lambda^2 + 2\lambda - 3$		+	0	-	0	+	

● Οπότε για $\lambda \in (-\infty, -1) \cup (\frac{3}{5}, +\infty)$ έχουμε $\Delta > 0$, άρα η αρχική εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες

● Για $\lambda \in (-1, \frac{3}{5})$ έχουμε $\Delta < 0$, άρα η αρχική εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες

● Για λ - 1 ή $\lambda = \frac{3}{5}$ έχουμε $\Delta = 0$, άρα η αρχική εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα

7. Να δείξετε ότι αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ανίσωση: $x^2 - 2\lambda x + 2\lambda^2 + 1 > 0$

Λύση

Έχουμε για το τριώνυμο $x^2 - 2\lambda x + 2\lambda^2 + 1$, $\Delta = -4\lambda^2 - 4\lambda - 4$. Αν θεωρήσουμε νέο τριώνυμο το $-4\lambda^2 - 4\lambda - 4$ έχουμε Δ' = $-48 < 0$, οπότε $\Delta < 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα η αρχική ανίσωση είναι ομόσημη του α για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

i) $x^2 - 5x + 4$ ii) $3x^2 - x - 4$ iii) $3x^2 - 6x + 3$

iv) $x^2 - x - 1$ v) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ iv) $-3x^2 - 3x + 18$

2. Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

i) $7x^2 - 5x + 1$ ii) $12x^2 - 13x + 3$ iii) $-x^2 + x + 56$

iv) $2x^2 + 7x - 30$ v) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$ vi) $6x^2 - x - 1$

3. Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

i) $x^2 - 6\sqrt{2}x + 9$ ii) $4x^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})x - \sqrt{6}$ iii) $x^2 - (2\sqrt{2} + \sqrt{3})x + 2\sqrt{6}$

iv) $x^2 - (\sqrt{7} - 3)x - 21\sqrt{7}$ v) $x^2 - 2\sqrt{6}x + 6$ vi) $3x^2 - (3\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$

4. Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

i) $2x^2 - \alpha x - \alpha^2$ ii) $2\alpha^2x^2 + \alpha\beta x - \beta^2$ iii) $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2$

5. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

i) $2x^4 - 5x^2 - 12$ ii) $(x + y + 2)^2 - 3(x + y + 2) + 2$ iii) $x^4 - 10x^2 + 9$

iv) $x^6 - 9x^3 + 8$ vi) $2\alpha^2\beta^2 + 3\alpha\beta - 2$ vi) $\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2$

6. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

i) $5\alpha x^2 + (5\alpha - 3\beta)x - 3\beta$, $(\alpha \neq 0)$ ii) $x^2 - (2\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ iii) $(x + y)^4 - 6(x + y)^2 + 8$

iv) $x^2 - |x| - 12$ v) $3\alpha^2 + \alpha\beta - 4\beta^2$ vi) $\alpha^8 - \alpha^4 - 2$

7. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε το τριώνυμο: $x^2 - (6\lambda - 1)x + 9\lambda^2 + 1$

i) να αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων

ii) να είναι τέλειο τετράγωνο

iii) να μην αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων

8. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

i) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6}$ ii) $\frac{x^2 + x}{x^2 + 8x + 7}$ iii) $\frac{2x^2 - x - 3}{4x^2 - 4x - 3}$

9. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

i) $\frac{2α^2 + 7α + 6}{3α^2 + 3α - 6}$ ii) $\frac{2x^2 - 8x - 90}{3x^2 + 36x + 105}$ iii) $\frac{2α^2 - 3αβ + β^2}{3αβ - α^2 - 2β^2}$

iv) $\frac{2x^2 - αx + 2x - α}{2x^2 + αx - α^2}$ v) $\frac{x^2 - (κ - 2λ)x - 2κλ}{2x^2 - (2κ - 1)x - κ}$ vi) $\frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}$

10. Να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$:

i) $x^2 - x - 12$ ii) $x^2 + 8x + 7$ iii) $x^2 - x - 20$

iv) $3x^2 - 2x + 5$ v) $9x^2 + 6x + 1$ vi) $-x^2 + 6x - 5$

11. Να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$:

i) $x^2 - (α + 1)x + α$ ii) $(3x - 2)(4x+1)$ iii) $(x + 1)^2 - 4(x + 3)^2$

iv) $x^2 - (α + β)x + αβ$ v) $3x^2 + 7x$ vi) $x^2 + (α^3 + 1)x + α^3$

12. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 - 3x + 5 > 0$ ii) $x^2 - 2x + 6 \leq 0$ iii) $-x^2 - 5x + 6 > 0$

iv) $x^2 - 7x > 0$ v) $x^2 - 14x + 45 > 0$ vi) $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(2x + 1)(3x + 2) < 0$ ii) $x^2 > 16$ iii) $x^2 \leq 25$

iv) $16x - 15x(x + 1) < 0$ v) $(x + 4)(x + 6) < 6(x + 6)$ vi) $x - 3 \geq (x - 3)^2$

14. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 - x - 6 \leq 0$ ii) $8x(x + 2) + 3(x + 1) > -1$ iii) $(x + 4)^2 - 2(x + 4) < 0$

iv) $-x^2 + 4x \leq 21$ v) $(x + 5)x \leq 2(x^2 + 2)$ vi) $(2x - 5)^2 > 9$

15. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\sqrt{3}\, x^2 - 3x < 0$ ii) $x^2 - 3|x| + 2 < 0$ iii) $x^4 - 4x^2 + 3 < 0$

iv) $(3x - 1)^2 - 5|3x - 1| < 0$ iv) $|x^2 - 2x| < 3$ vi) $\frac{5x^2 - 2}{2} > x - 1$

16. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x^2 - x + 2| < 3 - x$ ii) $9x^2 + 6x > -1$ iii) $|x^2 + x| < 2$

iv) $|x^2 - 4x + 3| > x + 9$ v) $|x^2 - x + 3| \geq 2x + 1$ vi) $x^2 + x + λ^2 + 1 < 0,\ λ \in \mathbb{R}$

17. i) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 8x - 20 \leq 0$

ii) Να δείξετε ότι: $2021^2 - 20 > 16168$

18. i) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$

ii) Να δείξετε ότι: $4040 < 2020^2 - 8$

19. Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

i) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ και $-x^2 + x + 2 \geq 0$

ii) $x^2 + x - 2 \geq 0$ και $x^2 + 2x - 8 < 0$

iii) $x^2 + x - 6 \leq 0$ και $x^2 - 2x + 1 > 0$

iv) $-2x^2 - 2x + 12 < 0$ και $-3x + 12 \geq 0$

v) $x^2 < 16$ και $x^2 > 3x$ και $x^2 > 4x - 4$

vi) $-x^2 + 2x < -3$ και $x^2 - 2x - 15 < 0$ και $3x - 6 > 0$

20. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = 3$ ii) $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$

iii) $|x^2 - x - 20| = x^2 - x - 20$ iv) $|x^2 - 2x + 1| = -x^2 + 2x - 1$

21. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

i) $3 \leq x^2 - 2x \leq 8$ ii) $4(x + 1) < x(x + 7) < 2(2x + 5)$

22. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το τριώνυμο $x^2 - 14x + 50$ παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 5 και μικρότερες του 26.

23. Να γράψετε την παράσταση χωρίς απόλυτες τιμές:

$A = |x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 5x + 6|$

24. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

i) $(3x + y)^2 + 2(3x + y) + 7 > 0$

ii) $-4(2x - y)^2 + 2(2x - y) - 6 < 0$

25. Να αποδείξετε ότι για κάθε x, y $\in \mathbb{R}$ ισχύει:

i) $x^2 + 2xy + 5y^2 + 3 > 0$ ii) $-5x^2 + 4xy - 3(y^2 + 1) < 0$

26. Να δείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι θετικές για κάθε x, y $\in \mathbb{R}^*$

$A = x^2 - xy + y^2$ $B = x^2 + 2xy + 3y^2$

27. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης για τις διάφορες τιμές α, β $\in \mathbb{R}^*$:

$A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1$

28. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ $\in \mathbb{R}$ οι παρακάτω ανισώσεις αληθεύουν για κάθε x $\in \mathbb{R}$.

i) $x^2 + 2(\lambda + 1)x + 9\lambda - 5 > 0$ ii) $x^2 + 6x + (5\lambda - 1)(\lambda - 1) > 0$

iii) $x^2 + (\lambda + 2)x + 8\lambda + 1 > 0$ iv) $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda - 3 < 0, \quad \lambda \neq 0$

29. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ $\in \mathbb{R}$, οι παρακάτω εξισώσεις έχουν λύσεις στο $\mathbb{R}$:

i) $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda - 3 = 0$ ii) $x^2 - \lambda x + 3\lambda - 8 = 0$

iii) $4x^2 - 2(2 - |\lambda|)x + \lambda - 4 = 0$ iv) $(\lambda + 2)x^2 - 2(1 - \lambda)x + 1 = 0$

30. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (1 - 2\lambda)x - (\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

i) Να αποδείξετε ότι έχει άνισες ρίζες για κάθε λ $\in \mathbb{R}$.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε να ισχύει:

$x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 \geq 0$

31. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + \lambda x - (\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$

Να βρείτε τις τιμές του λ $\in \mathbb{R}$ για τις οποίες έχει δυο ρίζες ετερόσημες.

32. Για τις διάφορες τιμές του λ $\in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$(\lambda - 1)x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda = 0$

33. Για ποιες τιμές του λ $\in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $(\lambda + 1)x^2 - 3(\lambda - 1)x + \lambda - 1$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε x $\in \mathbb{R}$.

34. Για ποιες τιμές του μ $\in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $(\mu - 5)x^2 - 4x + 4$ είναι θετικό για κάθε x $\in \mathbb{R}$.

35. Να βρείτε τις τιμές του $κ \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $x^2 - 5(κ - 1)x + κ^2 - 2 = 0$, να έχει δυο ρίζες x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει: $x_1 < 1 < x_2$.

36. Να βρείτε τις τιμές του $κ \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $x^2 + y^2 - 2x - y + λ > 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

37. Να βρείτε τις τιμές του $κ \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση: $(1- κ)x^2 - 3(κ - 1)x + 6 = 0$

i) να έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες

ii) να μην έχει πραγματικές ρίζες

38. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^2 - 10κx + 7κ + 1 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $κ \in \mathbb{R}$.

39. Να βρείτε τις τιμές του $λ \in \mathbb{R}$, ώστε το τριώνυμο: $(λ - 1)x^2 - 2(λ - 1)x - λ$, με $λ \neq 1$, να είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

40. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (2λ^2 - 4λ)x + λ^4 - 4λ^3 + 4λ^2 = 0$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα για κάθε $λ \in \mathbb{R}$

ii) Να βρείτε τις τιμές του $λ \in \mathbb{R}$, αν για την διπλή ρίζα x_o ισχύει ότι: $x_o < 3$.

41. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (2κ + 1)x + κ^2 + κ - 2 = 0$, με $κ \in \mathbb{R}$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει λύσεις άνισες για κάθε $κ \in \mathbb{R}$

ii) Για ποια τιμή του κ η εξίσωση έχει ρίζες ομόσημες

iii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρεθεί κ ώστε: $x_1^2 + x_2^2 = 29$

42. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $(4λ^2 + 1)x^2 - (2λ - 1)x + 1 = 0$ είναι αδύνατη για κάθε τιμή του $λ \in \mathbb{R}$.

43. Να βρεθεί η τιμή του $λ \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση: $(λ - 1)x^2 - 4x + 2λ = 0$ να έχει δυο ρίζες μικρότερες του 3

44. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ στο οποίο οι διαστάσεις διαφέρουν κατά 1. Να βρεθούν οι μέγιστες ακέραιες τιμές των διαστάσεων του, ώστε το εμβαδόν να μην ξεπερνά τα 20 cm^2.

ΤΕΣΤ 1^{ο}

Α. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$x^2 + \lambda x + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

Β. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda + 2 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες x_1, x_2 που επαληθεύουν την σχέση: $|x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2| < 6$

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - 2\alpha x + \alpha - 1 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

ΤΕΣΤ 2^{ο}

Α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 + \lambda(3x + 2) + 3 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Β. Να βρεθεί η σχέση των α, β, κ, λ, ώστε το τριώνυμο $(\alpha x + \beta)^2 + (\lambda x + \kappa)^2$ να είναι τέλειο τετράγωνο.

Γ. Να αποδείξετε ότι: $2\kappa^2 + 3\lambda^2 > 4\kappa\lambda$, $(\kappa, \lambda \neq 0)$

Δ. Για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

α) $3x + 7 > 0$
β) $x^2 - 6x + 5 > 0$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x + 1|x + 5 > 2|x + 1|$ ii) $|x - 2||x - 4| < 5|x - 2|$ iii) $(3x - 1)^3 - 9(3x - 1)^2 > 0$

2 . Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|3 - |x|| < 4$ ii) $|6 + |x|| > 8$ iii) $|x|^3 - x^2 < 0$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|3x + 2| \geq 5$ ii) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \geq 10$ iii) $|x + 3| > |2x - 1|$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $|x + 2| = x + 2$ ii) $|3x - 5| = 5 - 3x$ iii) $|x - 4| = x - 2$

5. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$\frac{2x+1}{3} > \frac{x}{2} - 1$ και $-3(x - 2) + 2(x + 1) > 4x - 5$

6. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες αληθεύει η ανίσωση:

$3 < |2x - 7| \leq 9$

8. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

i) $\alpha^2 + \alpha\beta + 2\beta^2$ ii) $2\kappa^2 - 3\kappa\lambda + \lambda^2$

iii) $3x^2 + xy - 4y^2$ iv) $(x - y + 2)^2 - 5(x - y) - 16$

9. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $A = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$ ii) $B = \frac{x^2 - (\sqrt{2} + 1)x - \sqrt{2}}{x^2 - 2}$

10. Να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $-x^2 + 4x + 5$ ii) $2x^2 + 3x - 5$ iii) $x^2 + 2x + 8$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 - 4\sqrt{2}x - 24 \geq 0$ ii) $(x + 4)(x + 5) - 4 \geq 2$ iii) $(x + 5)x \leq 2(x^2 + 2)$

12. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $-2x^2 + 4x - 2 \leq 0$ ii) $9x^2 + 6x + 1 > 0$ iii) $-x^2 + 3x - 2 \leq 0$

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^2 - 5|x| + 4 \leq 0$ ii) $(x - 3)^2 - 7|x - 3| + 6 \geq 0$ iii) $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$

14. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε οι παρακάτω ανισώσεις να ισχύουν για κάθε πραγματικό αριθμό x.

i) $x^2 - (2\lambda + 3)x + 1 > 0$ ii) $\lambda x^2 - 3x + \lambda < 0$ iii) $(\lambda - 1)x^2 + 4x + \lambda + 2 > 0$

15. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύει $(5x + y)^2 + 3(5x + y) + 4 > 0$

16. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $A = x^2 + 2xy + 3y^2 + 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

17. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση: $x^2 + (\lambda - 3)x + 6 - \lambda = 0$, να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

18. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση: $-2x^2 + 3x + 2\lambda^2 - 5\lambda - 12 = 0$, να έχει ρίζες ετερόσημες.

19. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση: $-x^2 + (\lambda + 5)x - 3\lambda - 7 = 0$, να μην έχει πραγματικές ρίζες.

20. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι παρακάτω παραστάσεις να διατηρούν σταθερό πρόσημο:

i) $(\lambda + 5)x^2 + (\lambda + 2)x + 1$ ii) $-4x^2 + (\lambda + 3)x - \lambda$

21. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

i) $x^2 - 8x - 9 \leq 0$ και $x^2 + 4x - 5 \geq 0$

ii) $3 < |x - 2 < 8$ και $-2x^2 - 5x + 7 \geq 0$

22. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$3x + 2 < x^2 + 4x < 8x - 3$

Διαγώνισμα Κεφάλαιο 4ο

Θέμα 1ο

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις Σωστό (Σ), Λάθος(Λ)

i) Αν για το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$ ισχύει $α + β + γ = 0$, τότε έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες ($α \neq 0$). Σ ☐ Λ ☐

ii) Αν για το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$ ($α \neq 0$) ισχύει $Δ < 0$ και $α < 0$, τότε είναι θετικό Σ ☐ Λ ☐

iii) Αν 2, 4 ρίζες του τριωνύμου $x^2 + βx + γ$, τότε $3^2 + 3β + γ > 0$ Σ ☐ Λ ☐

iv) Ισχύει $κ^2 + βκ - γ^2 > 0$, ($γ \neq 0$), για κάθε $κ \in \mathbb{R}$ Σ ☐ Λ ☐

v) Η ανίσωση $-λ^2 + λ - 2 > 0$ για κάθε $λ \in \mathbb{R}$ είναι αδύνατη Σ ☐ Λ ☐

Β. Να λυθεί η ανίσωση $αx + β > 0$

Θέμα 2ο

Να βρεθεί η τιμή του $λ \in \mathbb{R}$, ώστε να απλοποιείται η παράσταση:

$$A = \frac{x^2 - λx + 8}{x^2 - 5x + 6}$$

Θέμα 3ο

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

i) $|x^2 - 3x - 15| < 2x^2 - x$

ii) $6 < x^2 - |x| < 12$

Θέμα 4ο

Δίνεται το τριώνυμο $(λ - 2)x^2 + (λ - 2)x + 2 = 0$, $λ \in \mathbb{R} - \{2\}$

i) Να βρείτε την διακρίνουσα Δ και να λύσετε την ανίσωση $Δ < 0$

ii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $(λ - 2)x^2 + (λ - 2)x + 2 > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.