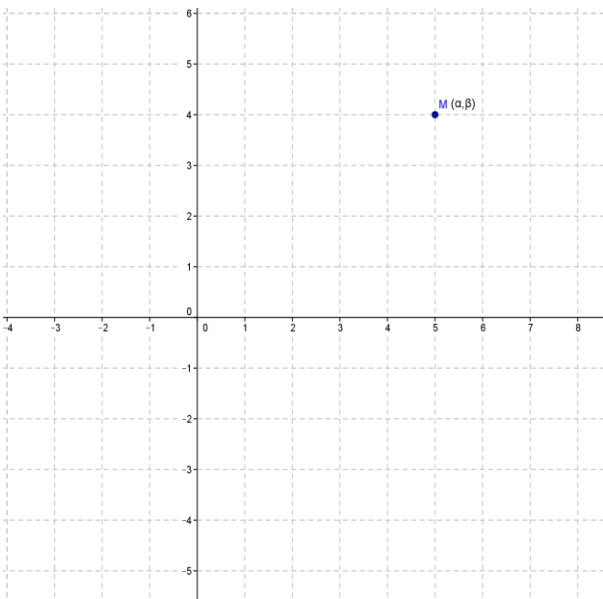


6ο

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Καρτεσιανές συντεταγμένες

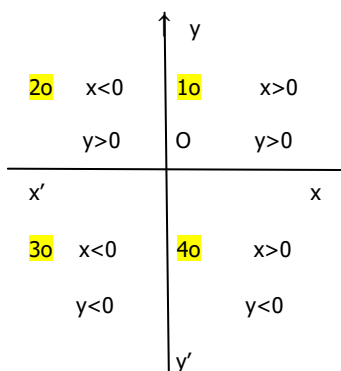
- Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δυο κάθετους άξονες $x'x$, $y'y$ που τέμνονται στο σημείο O (αρχή των αξόνων). Ο άξονας $x'x$ λέγεται άξονας τετμημένων ή άξονας των x και ο άξονας $y'y$ λέγεται άξονας των τεταγμένων ή άξονας των y .
- Για κάθε σημείο M του επιπέδου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (a,b) πραγματικών αριθμών (μοναδικό) και αντιστρόφως σε κάθε ζεύγος (a,b) αντιστοιχεί μοναδικό σημείο M στο επίπεδο.



- Οι αριθμοί a,b λέγονται συντεταγμένες του σημείου M α τετμημένη, β τεταγμένη και συμβολίζουμε $M(a,b)$.
- Το σύστημα των αξόνων λέγεται καρτεσιανό σύστημα αξόνων και συμβολίζεται Oxy ενώ το επίπεδο πάνω στο βρίσκεται λέγεται καρτεσιανό επίπεδο.
- Αν οι άξονες έχουν μονάδες με ίδιο μήκος τότε λέγεται ορθοκανονικό.

● Σχόλιο

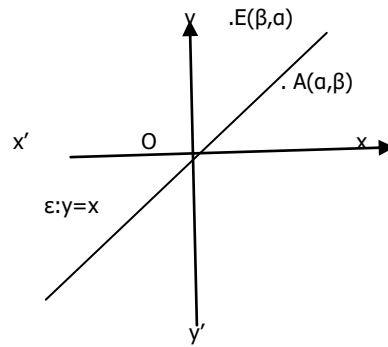
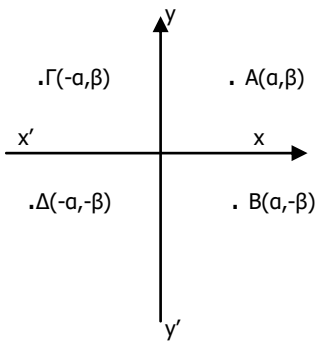
- Κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη 0 και η μορφή του είναι $(x,0)$.
- Κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$ έχει τετμημένη 0 και η μορφή του είναι $(0,y)$.
- Οι άξονες $x'x$ και $y'y$ χωρίζουν το καρτεσιανό επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια.



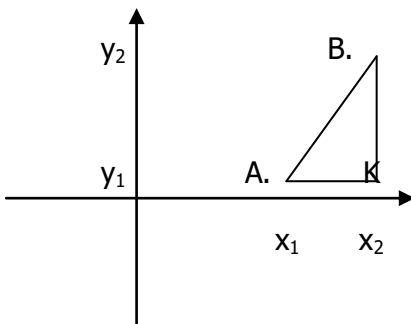
● Συμμετρία σημείου στο καρτεσιανό επίπεδο

- Δίνεται ένα σημείο $A(a,b)$ στο σύστημα αξόνων Oxy

- Το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα των x' είναι το σημείο $B(a,-\beta)$, δηλαδή έχει ίδια τεταγμένη και αντίθετη τεταγμένη.
- Το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα των y' είναι το σημείο $\Gamma(-a,\beta)$, δηλαδή έχει ίδια τεταγμένη και αντίθετη τεταγμένη.
- Το συμμετρικό του A ως προς το κέντρο O είναι το σημείο $\Delta(-a,-\beta)$, δηλαδή έχει αντίθετη τεταγμένη και αντίθετη τεταγμένη.
- Το συμμετρικό του A ως προς τη 1^{η} διχοτόμο των αξόνων είναι το σημείο $E(\beta,a)$, δηλαδή έχουμε αλλαγή στη σειρά των συντεταγμένων του A.



• Απόσταση σημείων

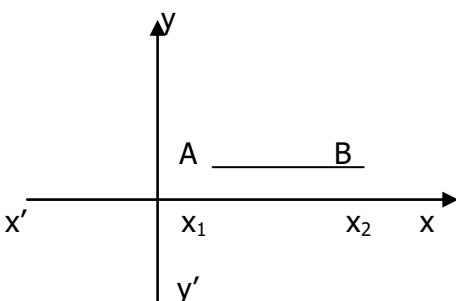


Δίνονται δυο σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Σχηματίζω το ορθογώνιο τρίγωνο ABK . Έχουμε $(AK) = |x_2 - x_1|$ και $(BK) = |y_2 - y_1|$, από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ABK έχουμε $(AB)^2 = (AK)^2 + (BK)^2$ ή $(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ άρα $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

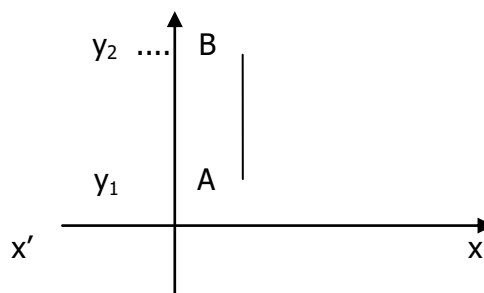
• Ειδικές Περιπτώσεις

α) Αν το τμήμα AB είναι παράλληλο στον άξονα x' , τότε $(AB) = |x_2 - x_1|$ Σχήμα 1.

β) Αν το τμήμα AB είναι παράλληλο στον άξονα y' , τότε $(AB) = |y_2 - y_1|$ Σχήμα 2.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

π.χ. Δίνονται τα σημεία $A(3,1)$, $B(3,5)$, $\Gamma(-1,1)$ τα οποία είναι οι κορυφές του τριγώνου $AB\Gamma$. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του και το είδος του τριγώνου.

Λύση

$$\text{Έχουμε } (AB) = \sqrt{(3-3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4^2} = 4, \quad (ΑΓ) = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$(BΓ) = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

Παρατηρώ ότι $(AB) = (ΑΓ)$ και $(AB)^2 + (ΑΓ)^2 = (BΓ)^2$ δηλαδή το $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο.

● Εξίσωση κύκλου

Δίνεται κύκλος C με κέντρο το σημείο O (αρχή των αξόνων) και ακτίνα ρ . Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο $M(x,y)$ που ανήκει στο κύκλο ισχύει: $x^2 + y^2 = \rho^2$

Απόδειξη

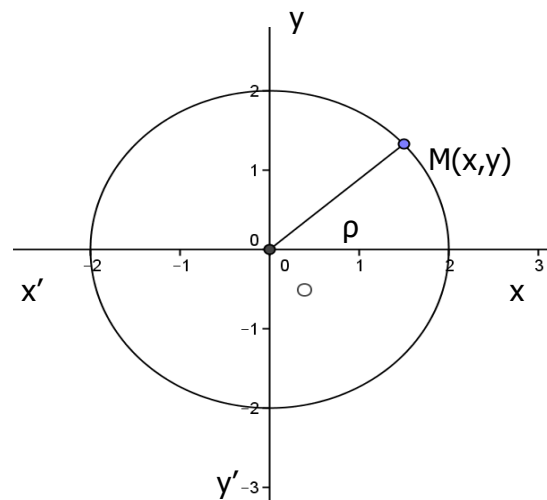
Έστω $M(x,y)$ τυχαίο σημείο του κύκλου. Τότε $(OM) = \rho$

$$\text{δηλαδή } \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \rho \quad \text{άρα}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

Επομένως το σημείο $M(x,y)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$C: x^2 + y^2 = \rho^2. \quad (1)$$



Δηλαδή οποιοδήποτε σημείο του κύκλου ικανοποιεί την εξίσωση (1) και αντίστροφα αν οι συντεταγμένες κάποιου σημείου $M(x,y)$ ικανοποιούν την εξίσωση (1) τότε το σημείο M ανήκει πάνω στο κύκλο.

Μοναδιαίος Κύκλος: Έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$

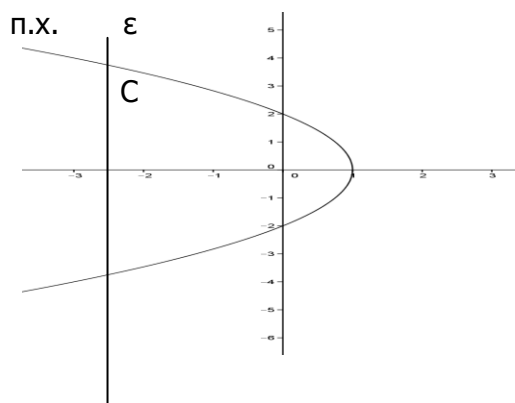
● Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

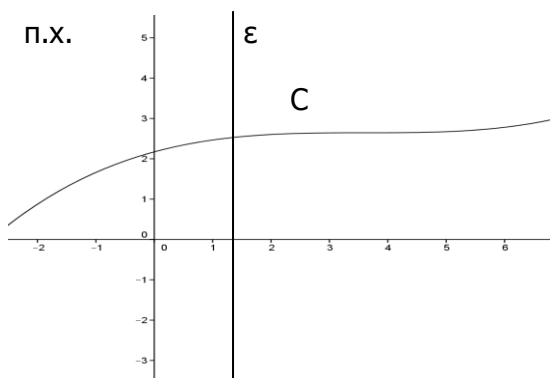
Το σύνολο των σημείων της μορφής $M(x,f(x))$ λέγεται γραφική παράσταση της συνάρτησης f και συμβολίζεται συνήθως με C_f . Η εξίσωση της γραμμής C_f είναι η $y = f(x)$.

Σχόλιο

Επειδή σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχεί μοναδικό $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ μια φορά.



Η γραμμή C δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης διότι η κατακόρυφη ευθεία ϵ την τέμνει δυο φορές

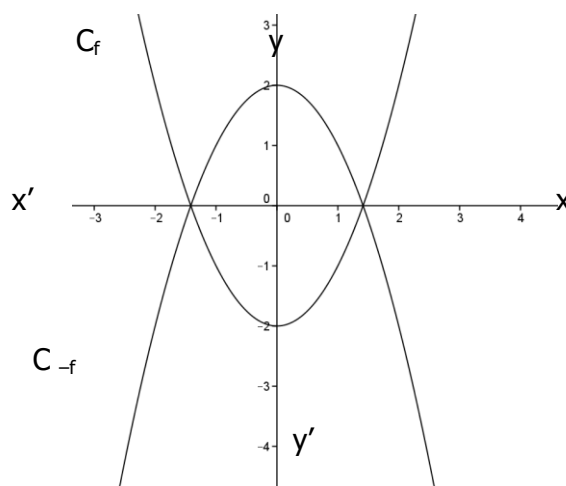


Η γραμμή C αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης διότι κάθε κατακόρυφη ευθεία ϵ την τέμνει το πολύ μια φορά.

● Σχέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και $-f$

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , μπορούμε να σχηματίσουμε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$, παίρνοντας τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$. Η γραφική παράσταση της $-f$ αποτελείται από τα σημεία της μορφής $M(x, -f(x))$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ αν έχουν κοινά σημεία, τότε βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$.



Παρατηρήσεις

● Πως βρίσκουμε που τέμνει μια γραμμή C τους άξονες $x'x$, $y'y$

- Για τον άξονα $x'x$ τα σημεία τομής βρίσκονται από τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$
- Για τον άξονα $y'y$ βρίσκω την τιμή $f(0)$ (Αν ο αριθμός 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού A)

● Πως βρίσκουμε που τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων f, g

Λύνοντας την εξίσωση $f(x) = g(x)$, μπορούμε να βρούμε τις τιμές του x . Κατόπιν σε μια από τις δυο συναρτήσεις αν αντικαταστήσουμε αυτές τις τιμές, θα βρούμε και τις τιμές του y .

● Πως βρίσκουμε τις τιμες του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ (ομοίως κάτω)

Λύνοντας την ανίσωση $f(x) > 0$ βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ (Ομοίως $f(x) < 0$ για κάτω από τον $x'x$).

• Πως βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από γραφική παράσταση της g (ομοίως κάτω)

Λύνοντας την ανίσωση $f(x) > g(x)$ βρίσκουμε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g (Ομοίως $f(x) < g(x)$ 0 για κάτω).

Ασκήσεις

A ομάδα

1. Δίνονται τα σημεία $A(-3,-4)$ και $B(9,5)$. Να βρεθεί η απόσταση (AB)
2. Δίνεται το σημείο $M(-4,5)$. Να βρείτε το συμμετρικό του ως προς:
i) $x'x$ ii) $y'y$ iii) το κέντρο $O(0,0)$ iv) 1^n διχοτόμο των αξόνων
3. Να βρεθούν οι τιμές των κ, λ αν τα σημεία $A(\kappa-2,\lambda+4)$, $B(4+\kappa,2\lambda+6)$ είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $O(0,0)$.
4. Να βρεθούν οι τιμές των κ, λ αν τα σημεία $A(\kappa+\lambda,8)$, $B(\lambda-3,4)$ είναι συμμετρικά ως προς τη 1^n διχοτόμο των αξόνων
5. Να βρεθεί η τιμή του κ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2+4x+\kappa}{x^2+1}$ να διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.
6. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2-6x+5$ με τους άξονες.
7. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με τύπο $f(x) = -x^2 + 4x -3$, βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
8. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = x^2$ και $g(x) = 2\lambda x + \lambda$. Να βρεθεί η τιμή του λ, ώστε οι γραφικές τους παραστάσεις να τέμνονται σε δυο σημεία.
9. Δίνεται συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 - (a+\beta)x + a\beta$
i) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$
ii) Αν $\kappa = \frac{a+2\beta}{3}$ να δείξετε ότι το σημείο $A(\kappa, f(\kappa))$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$
10. Να βρεθούν τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g με τύπους $f(x) = x^3$, $g(x) = 4x$
11. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = |x| + 2$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $\epsilon: y=4$.
12. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g να έχουν ένα κοινό σημείο με $f(x) = x^2$ και $g(x) = -x^2 + 2x + \lambda$.

13. Να βρείτε τα σημεία στα οποία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες:

i) $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

ii) $f(x) = |x-3| + x-5$

iii) $h(x) = x^5 - 16x$

iv) $k(x) = x^2 - 6|x| + 5$

v) $b(x) = (x^3-8)|x+1|$

vi) $q(x) = (|x-2| - 4)(\sqrt{x} - 1)$

14. Να βρείτε τα διαστήματα του x , στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g αν $f(x) = x^2 + 4x - 6$ και $g(x) = -x^2 - 2x + 15$

15. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων $f(x) = -x^2 - 1$ και $g(x) = x^{2020} + 2020$ δεν έχουν κοινά σημεία.

16. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 2|x+2| + 3$ και $g(x) = 3|x-1| - 1$

17. Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x$ και της ευθείας $\epsilon: y = -2$