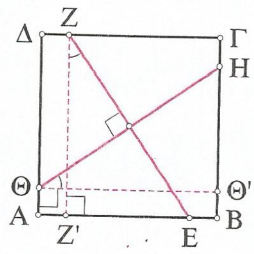
12.20 Αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου, να αποδειχθεί ότι είναι ίσα.

Απόδειξη



Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ και έστω ότι $ΕΖ \perp ΗΘ$. Φέρνουμε τις $ΖΖ' \perp ΑΒ$ και $ΘΘ' \perp ΒΓ$. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΘΘ'Η και ΖΖ'Ε. Αυτά έχουν:

i) $ΘΘ' = ΖΖ'$, διότι $ΘΘ' = ΑΒ = ΒΓ = ΖΖ'$,

ii) $\widehat{Θ} = \widehat{Ζ}$, διότι είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες.

Άρα είναι $\overset{\triangle}{ΘΘ'Η} = \overset{\triangle}{ΖΖ'Ε}$, επομένως $ΖΕ = ΘΗ$.

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

12.21 α) Τι ονομάζεται παραλληλόγραμμο; Ποιες είναι οι ιδιότητές του;

β) Πότε ένα κυρτό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο;

12.22 α) Τι είναι το ορθογώνιο και ποιες ιδιότητες έχουν οι διαγώνιές του;

β) Τι είναι ο ρόμβος και ποιες ιδιότητες έχουν οι διαγώνιές του;

12.23 Τι είναι το τετράγωνο και ποιες ιδιότητες έχει;

12.24 Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{Α} = 80°$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{Β}$ τέμνει την πλευρά ΓΔ στο σημείο Ε, τότε:

α) το μέτρο της γωνίας $\widehat{ΒΕΓ}$ είναι:

☐ Α: 40° ☐ Β: 50° ☐ Γ: 30°
☐ Δ: 60° ☐ Ε: 80°

β) το τρίγωνο ΒΓΕ είναι:

☐ Α: ισόπλευρο ☐ Β: ισοσκελές
☐ Γ: ορθογώνιο ☐ Δ: αμβλυγώνιο

12.25 Τα μήκη των πλευρών ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι $3x + 5, 2x + 7, 7 - x$ και $x + 3$. Η τιμή του μήκους της περιμέτρου του είναι:

☐ Α: 20 ☐ Β: 11 ☐ Γ: 5
☐ Δ: 30 ☐ Ε: 32

12.26 α) Αν ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει $ΑΓ = ΒΔ$, τότε είναι ορθογώνιο.

Σ ☐ Λ ☐

β) Αν ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει ίσες διαγώνιες, τότε είναι ορθογώνιο.

Σ ☐ Λ ☐

12.27 α) Αν ένας ρόμβος έχει ίσες διαγώνιες, τότε είναι τετράγωνο.

Σ ☐ Λ ☐

β) Τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

Σ ☐ Λ ☐

12.28 α) Τα μέσα των πλευρών τετραγώνου είναι κορυφές τετραγώνου.

Σ ☐ Λ ☐

β) Αν σε ένα παραλληλόγραμμο δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.

Σ ☐ Λ ☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

1) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Λαμβάνουμε δύο σημεία Ε, Ζ της ΑΓ, ώστε να ισχύει η σχέση ΕΟ=ΟΖ=ΟΒ=ΟΔ. Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι τετράγωνο.

2) Αποδείξτε ότι αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες και αντίστροφα.

3) Από την κορυφή Β παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε τμήμα ΒΕ κάθετο προς την πλευρά ΑΔ και από την κορυφή Δ το τμήμα ΔΖ κάθετο στην πλευρά ΒΓ. Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο ΕΒΖΔ είναι ορθογώνιο και το κέντρο του συμπίπτει με το κέντρο του ΑΒΓΔ.

4) Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (Ο,ρ), (Κ,ρ) οι οποίοι εφάπτονται στο σημείο Α. Φέρουμε την χορδή ΑΒ του κύκλου (Ο,ρ) και την χορδή ΑΓ του κύκλου (Κ,ρ) ώστε να είναι κάθετες μεταξύ τους. Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο ΟΚΒΓ είναι παραλληλόγραμμο.

5) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, στο οποίο φέρουμε την διαγώνιο ΑΓ. Από τις κορυφές Β, Δ φέρουμε κάθετες στην

διαγώνιο ΑΓ με Ε και Ζ αντίστοιχα ίχνη. Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο.

6) Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν μια ευθεία διέρχεται από το Ο τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Κ και την πλευρά ΔΓ στο Λ. Μια άλλη ευθεία που διέρχεται από το Ο τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Μ και την πλευρά ΔΓ στο Ν. Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

7) Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ, ΓΒ κατά ίσα τμήματα ΑΕ και ΒΖ αντίστοιχα.

α) δείξτε ότι ΑΖ=ΕΔ

β) αν η ΖΑ τέμνει την ΕΔ στο Μ, θεωρούμε τυχαίο σημείο Θ του ΜΔ ώστε ΜΘ=ΜΕ. Επίσης προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΗ=ΑΜ. Δείξτε ότι το τετράπλευρο ΑΕΗΘ είναι ρόμβος.

8) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΓΔ κατά τμήματα ΒΕ, ΔΖ αντίστοιχα ώστε ΒΕ=ΔΖ. Αποδείξτε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο

β) οι ευθείες ΑΓ, ΒΔ, ΕΖ συντρέχουν

9) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και τυχαίο σημείο Δ της ΒΓ. Οι μεσοκάθετες των ΒΔ, ΔΓ τέμνουν τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα . Αποδείξτε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΕΖΔ είναι παραλληλόγραμμο

β) ΕΔ+ΔΖ=ΑΒ

10) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και σημείο Μ στην προέκταση της ΒΓ προς το Β. Από την Μ φέρουμε παράλληλη ευθεία στην ΑΒ , που τέμνει την ΑΓ στο Δ, και ευθεία παράλληλη στη ΑΓ που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Αποδείξτε ότι:

α) το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές

β) ΜΔ-ΜΕ=ΑΓ

γ) αν Ζ σημείο της ΜΔ ώστε ΔΖ=ΔΑ τότε οι ευθείες ΔΕ, ΑΜ, ΖΒ συντρέχουν.