

400. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)f'(\xi_2) > 0$.

Απόδειξη ανισοτήτων με μία μεταβλητή

401. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta$, ισχύει:

α) $\frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{\beta}} < \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} < \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}$ β) $v(\beta - \alpha)\alpha^{v-1} < \beta^v - \alpha^v < v(\beta - \alpha)\beta^{v-1}, v \geq 2$

402. Να αποδείξετε ότι: α) $2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}$ β) $e^e \cdot \pi^\pi > e^{2\pi}$

403. Να αποδείξετε ότι $\textcircled{\alpha} \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}, x > 0$ $\textcircled{\beta} \frac{2}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x-1} < \frac{2}{x-1}, x > 1$

$\textcircled{404}$ Να αποδείξετε ότι $x+1 \leq e^x \leq xe^x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

405. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$

β) $\sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{3}$ και $\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{2}$

$\textcircled{406}$ Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με f' γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι: $f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1), x \in \mathbb{R}$.

$\textcircled{407}$ Δίνεται συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με f' γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι $2f(x) < f(x-1) + f(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

408. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\gamma) = 0, \gamma \in (\alpha, \beta)$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι $(\beta - \gamma)f(\alpha) + (\gamma - \alpha)f(\beta) > 0$.

Σύνθετα θέματα

409. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει: $f'(x) \leq -x^2 + x - 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

410. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύει: $f'(x) \geq e^x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

411. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με f' γνησίως αύξουσα και $f'(5) > 0$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

412. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+2) + f(x) - 2f(x+1)] = 0$.

413. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(-2,1)$, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.