

- ii) Να αποδείξετε ότι  $\beta_{v+1} = \frac{1}{4}a_v - 1$ .
- iii) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία  $(\beta_n)$  είναι γεωμετρική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον λόγο  $\lambda$  και τον πρώτο της όρο  $\beta_1$ .
- iv) Να αποδείξετε ότι

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_5 = \frac{4092}{512}$$

- v) Να βρείτε το άθροισμα

$$a_1 + a_2 + \dots + a_5$$

**5.26** Παρατηρήθηκε ότι η ποσότητα του πετρελαίου που διαρρέει προς τη θάλασσα από ένα βυθισμένο δεξαμενόπλοιο διπλασιάζεται κάθε ημέρα (λόγω αύξησης του ρήγματος που προκάλεσε η διαρροή). Το πετρέλαιο που διέρρευσε κατά τη διάρκεια της πρώτης ημέρας ήταν 20 τόνοι.

- i) Πόσοι τόνοι πετρελαίου θα διαρρεύσουν κατά τη διάρκεια της 7ης ημέρας;  
 ii) Πόσοι τόνοι πετρελαίου θα διαρρεύσουν συνολικά κατά τις 7 πρώτες ημέρες;  
 iii) Αν η διαρροή σταματήσει στο τέλος της 7ης ημέρας και το κόστος καθαρισμού του πετρελαίου είναι 1000 € ανά τόνο, πόσο θα στοιχίσει ο καθαρισμός της θάλασσας από τη ρύπανση που προκάλεσε το δεξαμενόπλοιο;

(Εξετάσεις 2000)

**5.27** Στους δίσκους A και B μιας ζυγαριάς υπάρχουν βάρη 40 και 20 γραμμαρίων αντίστοιχα. Στον δίσκο A τοποθετούμε διαδοχικά βάρη των 20 γραμμαρίων το καθένα. Στον δίσκο B τοποθετούμε τριπλάσιο βάρος του αρχικού και συνεχίζουμε προσθέτοντας βάρη, καθένα από τα οποία είναι τριπλάσιο του βάρους που είχε τοποθετηθεί την αμέσως προηγούμενη φορά.

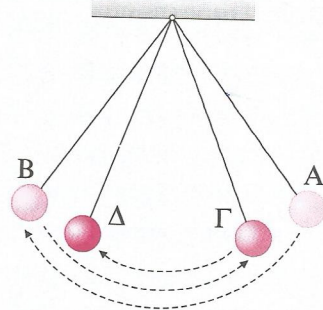
- i) Αν το συνολικό βάρος στον δίσκο B είναι 2420 γραμμάρια, να βρείτε πόσες φορές χρειάστηκε να τοποθετήσουμε βάρη στον δίσκο αυτό.  
 ii) Πόσα βάρη των 20 γραμμαρίων πρέπει να τοποθετήσουμε στον δίσκο A, ώστε να ισορροπήσει η ζυγαριά;

(Εξετάσεις 2000)

**5.28** Έχουμε 6 διαφορετικά δοχεία τοποθετημένα σε μια σειρά. Το δεύτερο δοχείο έχει όγκο ίσο με το  $\frac{1}{2}$  του όγκου του πρώτου δοχείου, το τρίτο έχει όγκο ίσο με το  $\frac{1}{2}$  του δεύτερου δοχείου κ.λπ.

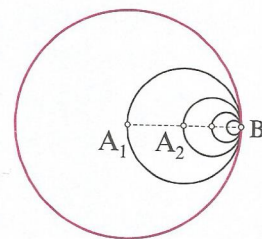
- i) Να αποδείξετε ότι οι όγκοι των δοχείων σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο και να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο της προόδου.
- ii) Να βρείτε τον τύπο που δίνει τον όγκο του έκτου δοχείου.
- iii) Να βρείτε το άθροισμα των όγκων των 6 δοχείων.
- iv) Αν το πρώτο δοχείο είναι άδειο και τα επόμενα πέντε είναι γεμάτα με νερό, να αποδείξετε ότι αν αδειάσουμε το νερό των πέντε δοχείων στο άδειο δοχείο, αυτό δεν θα ξεχειλίζει.
- v) Να απαντήσετε στο προηγούμενο ερώτημα για την περίπτωση που ο όγκος κάθε δοχείου είναι ίσος με τα  $\frac{2}{3}$  του όγκου του προηγούμενου δοχείου.

**5.29** Μια μπάλα που είναι δεμένη από ένα σχοινί αιωρείται, όπως φαίνεται στο σχήμα, από τη θέση Α στη θέση Β, κατόπιν στη θέση Γ, μετά στη θέση Δ κ.λπ. Αν  $\ell_1$  cm είναι το μήκος της πρώτης αιώρησης, από το Α στο Β, τότε κάθε επόμενη αιώρηση έχει μήκος ίσο με το μήκος της προηγούμενης πολλαπλασιασμένο με έναν θετικό αριθμό  $r$ , όπου  $r < 1$ .



- i) Να βρείτε τα μήκη  $\ell_2$  και  $\ell_3$  της 2ης και 3ης αιώρησης συναρτήσει των  $\ell_1$  και  $r$ .
- ii) Να βρείτε τον γενικό τύπο του μήκους συναρτήσει των  $\ell_1$  και  $r$ .
- iii) Τι μήκος θα έχει διαγράψει η μπάλα συνολικά μετά το τέλος της 5ης αιώρησης, όταν είναι  $\ell_1 = 20$  cm και  $r = \frac{9}{10}$ ;

**5.30** Στο διπλανό σχήμα η ακτίνα  $R_1 = (A_1B)$  του μεγάλου κύκλου είναι 1 m και κάθε επόμενου κύκλου είναι ίση με το μισό της ακτίνας του προηγούμενου.



- i) Να βρείτε την ακτίνα του 3ου, του 4ου και του 5ου κύκλου.
- ii) Να αποδείξετε ότι τα μήκη των ακτίνων αποτελούν γεωμετρική πρόοδο.
- iii) Να βρείτε το άθροισμα των 7 πρώτων ακτίνων.
- iv) Αν κατασκευάσουμε 10 τέτοιους κύκλους, να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών τους.