ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και f(α)≠f(β), τότε για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0)=\xi$.

Μονάδες 12

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε θα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 2

β. Αν η συνάρτηση $f+g$ είναι συνεχής στο x_0, τότε οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 2

δ Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο (α, β) και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) < 0$, τότε θα ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

Μονάδες 2

Γ. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} a^2x^3+3x+\beta^2 &, x<1 \\ 2\beta x^2+2\alpha x+1 &, x\geq 1 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=\beta=1$

(μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(-\infty,1)$.

(μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2016$ έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα στο $[1,+\infty)$.

(μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει

- $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3x+4}{x-2}=2015$
- $|g(x)-1|\leq|f(x)-2|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- η f είναι συνεχής στο 2
- $f(x)=f(x+1), x\in\mathbb{R}$

α) να βρείτε το f(2)

(μονάδες 6)

β) να δείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

(μονάδες 6)

γ) να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = 3$.

(μονάδες 6)

δ) Αν η g είναι συνεχής στο [2,3] ,να δείξετε ότι η εξίσωση $2xg(x) = 5$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$

(μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο R.Αν ισχύει : $9f^2(x) - 6xf(x) = 9$ για κάθε $x \in R$,

Α) Αν $h(x) = 3f(x) - x$, να αποδείξετε ότι η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

(μονάδες 6)

Β) Αν $f(4) = -\frac{1}{3}$,

α) να δείξετε ότι $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 9}}{3}$

(μονάδες 6)

β) να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -2016$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(-\infty, 0)$.

(μονάδες 6)

γ) i) να δείξετε ότι $f(x) = -\dfrac{3}{x + \sqrt{9 + x^2}}$

(μονάδες 2)

ii) η εξίσωση $f(x) = \dfrac{f(1) + 3f(2) + 2f(3)}{6}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο [1,3]

(μονάδες 5)