

Εύρεση αρχικής με πολλαπλασιασμό της $e^{F(x)}$

351. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0) = ef(1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) + 2xf(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.
352. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο $[3,4]$ με $f(3) = f(4)$, $g(3)$ ρίζα της εξίσωσης $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ και $g'(4)$ ρίζα της $x^3 + x = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) + g'(x)f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(3,4)$.

353. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f'(x) = \frac{2xf'(x)}{1-x^2} \text{ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο } \mathbb{R}.$$

354. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$$f(\alpha) = e^{\kappa(\beta-\alpha)} f(\beta), \kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*. \text{ Να αποδείξετε ότι υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } \kappa f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0$$

355. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(1) - f(0) = 1$.

α) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi_1) = 2\xi_1$.

β) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi_2) = \frac{f(1) - 1 - f(\xi_2)}{\xi_2 - 1}$.

Υπαρξη ρίζας της $f''(x) = 0$

356. Δίνεται συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, $\alpha\beta < 0$, με $f(\alpha) = f(\beta) = f(0)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

357. Εστω $f: [2,6] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση 3 φορές παραγωγίσιμη στο $[2,6]$ με $f(2) = f(6)$ και $f'(2) = f'(6) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 6)$, τέτοιο ώστε: $f^{(3)}(\xi) = 0$.

358. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(0) = 1$, $f(1) = e - 1$ και $f(2) = e^2 - 8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) + 6\xi = e^{\xi}$.

359. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(1) = 1$, $f(2) = 4 - \ln 2$ και $f(e) = e^2 - 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) - \frac{1}{\xi^2} - 2 = 0$.

Το πολύ n ρίζες-Εις άτοπον απαγωγή-Μοναδικότητα ριζών

360. Δίνεται συνάρτηση f , συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) , με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

361. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - x^2 + x - 2 = 0$, έχει το πολύ 3 πραγματικές ρίζες.

362. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda xe^x = e$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $x \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ δύο