

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Σε πολλά καθημερινά φαινόμενα εμφανίζονται δυο μεγέθη, τα οποία μεταβάλλονται έτσι ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει την τιμή του άλλου. Η διαδικασία με την οποία σχετίζονται τα δυο μεγέθη πολλές φορές περιγράφεται από ένα μαθηματικό τύπο.
 - π.χ.** Αν ένας ποδηλάτης τρέχει με σταθερή ταχύτητα $u = 15$ km/h τότε το διάστημα ως προς το χρόνο που διανύει ισούται με $S = 15 \cdot t$ (t ο χρόνος σε ώρες), αν ο χρόνος είναι $t = 2h$, τότε έχουμε $S = 30km$, αν ο χρόνος είναι $t = 3h$, τότε έχει διανύσει $S = 15 \cdot 3 = 45km$.
 - π.χ.** Το εμβαδόν ενός κύκλου δίνεται από το τύπο $E = \pi r^2$. Είναι μια σχέση μεταξύ E , r η οποία μας δίνει για κάθε r ένα μοναδικό αριθμό E που αντιστοιχεί στο κύκλο με την αντίστοιχη ακτίνα. Αν $r = 1cm$ τότε $E = \pi cm^2$, αν $r = 2 cm$ τότε $E = 4\pi cm^2$
 - π.χ.** Αν η τιμή ενός προϊόντος είναι 4 ευρώ το κιλό, τότε η σχέση που δίνει το κόστος ως προς τα κιλά είναι $K = 4 \cdot x$ ευρώ. Αν αγοράσουμε 5 κιλά τότε το κόστος είναι $K = 4 \cdot 5 = 20$ ευρώ.
- Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που δεν μπορούμε να βρούμε μια διαδικασία αντιστοίχισης δυο μεγεθών.
 - π.χ.** Οι ώρες της ημέρας και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους
 - π.χ.** Ο χρόνος που απαιτείται για να λύσει ένας μαθητής μια άσκηση
 - π.χ.** Οι μέρες του έτους και η τιμή του πετρελαίου

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια διαδικασία με την οποία τιμές από ένα σύνολο A αντιστοιχούν σε μοναδικές τιμές σε ένα σύνολο B.

Ορισμός

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχεί σε μοναδικό στοιχείο του συνόλου B.

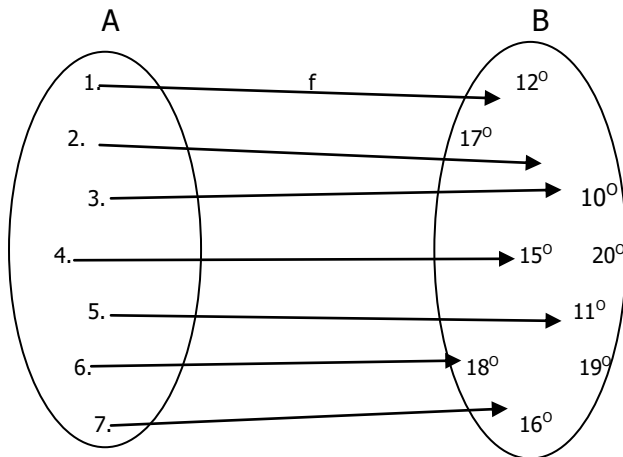
Χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης

- Το σύνολο A λέγεται πεδίο ορισμού ή σύνολο ορισμού της συνάρτησης (σύνολο τιμών του x)
- Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε μια συνάρτηση είναι συνήθως τα γράμματα $f, g, h \dots$
- Αν με μια συνάρτηση f από το A στο B, το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε $y = f(x)$ (Διαβάζουμε y ίσον με f του x). Το $f(x)$ λέγεται τιμή της f στο x .
- **Ανεξάρτητη μεταβλητή** λέγεται το γράμμα x που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης
- **Εξαρτημένη μεταβλητή** λέγεται το γράμμα y που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x
- **Σύνολο τιμών** είναι το σύνολο που περιέχει όλες τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$ και συμβολίζεται με $f(A)$

- Συμβολίζουμε μια συνάρτηση f από το σύνολο A στο σύνολο B ως εξής:

$$f:A \rightarrow B \quad \text{όπου } x \rightarrow f(x)$$

- π.χ.** Έστω συνάρτηση f η οποία αντιστοιχεί κάθε ημέρα της εβδομάδας στην υψηλότερη θερμοκρασία της.



Για τη συνάρτηση f έχουμε $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ και $f(A) = \{10^{\circ}, 11^{\circ}, 12^{\circ}, 15^{\circ}, 16^{\circ}, 18^{\circ}\}$

Παρατήρηση

- Κάθε στοιχείο του A αντιστοιχεί σε ένα μόνο του B
- Κάποια στοιχεία του B δεν αποτελούν τιμές της f π.χ. το $17^{\circ}, 19^{\circ}$
- Δυο ή περισσότερα στοιχεία του A μπορεί να αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του B π.χ. $f(2) = 10^{\circ}$, $f(3) = 10^{\circ}$

Παρατήρηση

Για τον ορισμό μιας συνάρτησης πρέπει να γνωρίζουμε:

- Το πεδίο ορισμού A
- Το σύνολο B
- Το $f(x)$ για κάθε $x \in A$

Πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής

Λέγονται οι συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει: $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$

Παρατήρηση

Συνήθως δίνουμε ένα τύπο για κάθε συνάρτηση μέσω του οποίου βρίσκουμε τις δυνατές τιμές του x για τις οποίες ορίζεται καθώς και την τιμή του y για κάθε x .

π.χ. $f(x) = \sqrt{x-2}$ ή $y = \sqrt{x-2}$

Μορφές τύπων συνάρτησης

- α. Απλός τύπος** (Δίνεται μόνο ένας τύπος μέσω του οποίου μπορούμε να βρούμε όλες τις τιμές της συνάρτησης)

π.χ. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 3$

β. Πολλαπλού τύπου (κλαδική) (Δίνονται δυο ή περισσότεροι τύποι για να βρούμε τις τιμές της συνάρτησης, όπου για τον κάθε ένα ορίζονται οι τιμές του x που αντιστοιχούν)

π.χ. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 2 \\ -2x + 3, & x \leq 0 \end{cases}$ $f(4) = 4^2 + 1 = 17$ (χρηση 1^{ου} τυπου διοτι $4 > 2$), $f(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$

(χρηση 2^{ου} τυπου διοτι $x=0$, $f(1)$ δεν οριζεται (διοτι η τιμη $x=1$ δεν αντιστοιχει σε κανενα κλαδο)

Επισης $A = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$

Εργασίες

1. Να βρεθούν οι τιμές των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^4 + 2x - 3$ για $x=0$, $x=-2$

β) $g(x) = \frac{5}{x+3}$ για $x = 2$, $x = -2$

γ) $h(x) = \sqrt{x+1}$ για $x=3$, $x=8$

δ) $k(x) = |x+3| - 8$, $x = -5$, $x = 1$

2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3, & x > 1 \\ x + 2, & x \leq -2 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι τιμές της συνάρτησης για $x=-3$, $x=2$, $x=-6$, $x=0$

Παρακαλώ να μελετηθεί η θεωρία και να έχω τις απαντήσεις των εργασιών έως 9/4/2020