1.2 Συναρτήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

- **Ερωτήσεις Θεωρίας**

1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α;

2. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης f;

3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

4. Αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g;

- **Χαρακτηρισμός προτάσεων ψευδής ή αληθής (Με αιτιολόγηση)**

1. Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $f \circ f$.

2. Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε x πραγματικό τότε η $f(x)=0$ ή $g(x)=0$ για κάθε x πραγματικό αριθμό.

3. Μια συνάρτηση δεν μπορεί να είναι άρτια και περιττή.

4. Αν $f(A) = \mathbb{R}$, τότε για κάθε $y_o \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό $x_o \in A$, ώστε $f(x_o) = y_o$.

5. Αν δυο συναρτήσεις έχουν τον ίδιο τύπο είναι ίσες.

6. Αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog, gof, τότε ισχύει fog = gof.

7. Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης gof είναι το $\mathbb{R}$, τότε καθεμιά από τις συναρτήσεις f και g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

8. Αν δύο συναρτήσεις f, g δεν έχουν ίδια Πεδία Ορισμού δεν είναι ποτέ ίσες.

9. Αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες, τότε έχουν τον ίδιο τύπο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=|x|$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x. Σ ☐ Λ ☐

2. Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$. Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x΄x μπορούν να βρεθούν, αν θέσουμε όπου $y = 0$ και λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$. Σ ☐ Λ ☐

3. Δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, αν υπάρχουν κάποια $x \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x)$. Σ ☐ Λ ☐

4. Για να ορίζονται το άθροισμα και το γινόμενο δύο συναρτήσεων f και g θα πρέπει τα πεδία ορισμού τους να έχουν κοινά στοιχεία. Σ ☐ Λ ☐

5. Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f(x + y) = f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x, y\in \mathbb{R}$. Σ ☐ Λ ☐

6. Για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$, ισχύει $f(x\cdot y) = f(x)+f(y)$ για κάθε $x, y > 0$. Σ ☐ Λ ☐

7. Οι ίσες συναρτήσεις έχουν την ίδια γραφική παράσταση. Σ ☐ Λ ☐

8. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $I(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει $(f\circ I)(x) = (I\circ f)(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Σ ☐ Λ ☐

9. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $g\circ f$ και $f\circ g$, τότε είναι υποχρεωτικά $f\circ g \neq g\circ f$. Σ ☐ Λ ☐

10. Αν $D_g = \mathbb{R}$, τότε $D_{gof} = D_f$. Σ ☐ Λ ☐

11. Κάθε ισότητα που περιέχει τις μεταβλητές x, y μας δίνει συνάρτηση του y Σ ☐ Λ ☐

12. Αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B\to \mathbb{R}$, αν $g(B) \cap A = \emptyset$, τότε δεν ορίζεται η $f\circ g$. Σ ☐ Λ ☐

13. Αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B\to \mathbb{R}$ και $g(B) \subseteq A$, τότε η $f\circ g$ ορίζεται στο B. Σ ☐ Λ ☐

14. Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_1, x_2 \in A$, αν $f(x_1) \neq f(x_2)$, τότε ισχύει $x_1 \neq x_2$ Σ ☐ Λ ☐

15. Δύο συναρτήσεις f, g που δεν είναι ίσες έχουν πάντα και διαφορετικά Πεδία Ορισμού. Σ ☐ Λ ☐

16. Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ορίζεται η $f\circ(g\circ h)$, τότε ορίζεται και η συνάρτηση $(f\circ g)\circ h$ και ισχύει $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$. Σ ☐ Λ ☐

17. Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής της παράστασης. Σ ☐ Λ ☐

18. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, -f είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x΄x. Σ ☐ Λ ☐

19. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, |f| είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y. Σ ☐ Λ ☐

20. Κάθε άρτια συνάρτηση έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα των y΄y. Σ ☐ Λ ☐

21. Ολες οι περιττές συναρτήσεις διέρχονται από το σημείο O(0,0). Σ ☐ Λ ☐

22. Όλες οι γραμμές στο επίπεδο αποτελούν γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Σ ☐ Λ ☐

23. Κάθε ευθεία της μορφής ε: x=α τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε ένα σημείο. Σ ☐ Λ ☐

24. Αν δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε και το γινόμενο και το πηλίκο τους έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Σ ☐ Λ ☐

25. Αν το σημείο $A(x_o,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, τότε ο αριθμός x_o είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$. Σ ☐ Λ ☐

26. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ σε ένα σημείο. Σ ☐ Λ ☐

27. Δύο συναρτήσεις είναι ίσες αν για κάθε $x \in D_f \cap D_g \neq \emptyset$ ισχύει f(x)=g(x). Σ ☐ Λ ☐

28. Το σύνολο ορισμού μιας συνάρτησης είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Σ ☐ Λ ☐

29. Αν f: A $\to \mathbb{R}$ και g: B$\to \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο σύνολο A $\cap$ B. Σ ☐ Λ ☐

30. Υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες είναι ταυτόχρονα περιοδικές και άρτιες. Σ ☐ Λ ☐

31. Έστω f: A $\to \mathbb{R}$ και x_1, $x_2 \in$ A, αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε ισχύει $x_1 = x_2$ Σ ☐ Λ ☐

32. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f, g, προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης f(x) = g(x). Σ ☐ Λ ☐

33. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι άρτιες στο A, τότε f + g είναι άρτια Σ ☐ Λ ☐

34. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι άρτιες στο A,τότε $\frac{f}{g}$ είναι άρτια (g(x)$\neq 0$) Σ ☐ Λ ☐

35. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι άρτιες στο A, τότε $f \circ g$ είναι άρτια Σ ☐ Λ ☐

36. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι περιττές στο A, τότε $f \circ g$ είναι άρτια Σ ☐ Λ ☐

37. Αν f άρτια και g περιττή στο A, τότε $f \circ g$ είναι περιττή Σ ☐ Λ ☐

38. Οι περιοδικές συναρτήσεις έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές τον άξονα y'y. Σ ☐ Λ ☐

39. Αν η f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική, τότε και η $g \circ f$ είναι περιοδική. Σ ☐ Λ ☐

40. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τέμνει μια φορά τον y'y. Σ ☐ Λ ☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Πεδίο ορισμού – σύνολο τιμών

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{3-x}{x-1}$ **β.** $f(x) = \frac{x}{x+2} + \frac{3x+1}{x-4}$ **γ.** $f(x) = \frac{5}{(x-1)(x^3-16x)}$

δ. $f(x) = \frac{x}{x^3-5x+4}$ **ε.** $f(x) = \frac{8x+1}{|x-2|-4}$ **στ.** $f(x) = \frac{5x+4}{|x-3|-|x-8|}$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \ln(|x|-2)$ **β.** $f(x) = \frac{5}{\ln^2 x - 1}$ **γ.** $f(x) = \ln(x^3+2x^2+x+2)$

δ. $f(x) = \ln(\sqrt[4]{x-3} - 1)$ **ε.** $f(x) = \frac{1}{e^x-2}$ **στ.** $f(x) = \ln(x^3+8) + \frac{4}{x-6}$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \sqrt[6]{-x^2+x+6}$ **β.** $f(x) = \sqrt{e^x - e}$ **γ.** $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - \ln x}$

δ. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln x - 1}{e^x - 2}}$ **ε.** $f(x) = \dfrac{5}{4\sigma\upsilon\nu^2 x - 1}$ **στ.** $f(x) = \varepsilon\varphi(x-1)$

ζ. $f(x) = \sqrt{2\eta\mu x - 1}$ **η.** $f(x) = \sqrt{x^2-9} + \dfrac{1}{\sqrt{\ln x + 1}}$ **θ.** $f(x) = \ln(\sigma\varphi x)$

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = x^2 - 4x + 5$ **β.** $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$ **γ.** $f(x) = 2|x-3| + 8$

δ. $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - 4$ **ε.** $f(x) = e^{x-1} + 5$ **στ.** $f(x) = \ln^2 x + 6\ln x + 10$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, όπου $f(x) = \dfrac{8|x|+1}{x^2+4x+\alpha}$

6. Να βρείτε τις τιμές του α > 0, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι όλο το $\mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + (\ln\alpha)x + 2}$

7. Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο: $f(x) = \ln[(k-1)x^2 + (k-2)x + k - 3]$ να είναι όλο το $\mathbb{R}$.

8. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης: $f(x) = x^2 + 6x + 4$, $x>2$

9. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης: $f(x) = x^2 - 8x + 2$, αν $D_f = [1,4]$

10. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης: $f(x) = 4 + \sqrt{x^2 - 4x + 6}$

11. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{x-4}$ **β.** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+4}$ **γ.** $f(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$ αν $x\in[-2,1]$

δ. $f(x) = 4|x-2|-8$, $x\in[-4,8]$ **ε.** $f(x) = 3\eta\mu x - 5$, $x\in[\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{4}]$ **στ.** $f(x) = \dfrac{|x-2|}{3x}$

12. Δίνεται η σχέση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3+x^2}, & x \le \kappa \\ 2x, & x \ge \kappa \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του φυσικού αριθμού κ για την οποία η f είναι συνάρτηση.

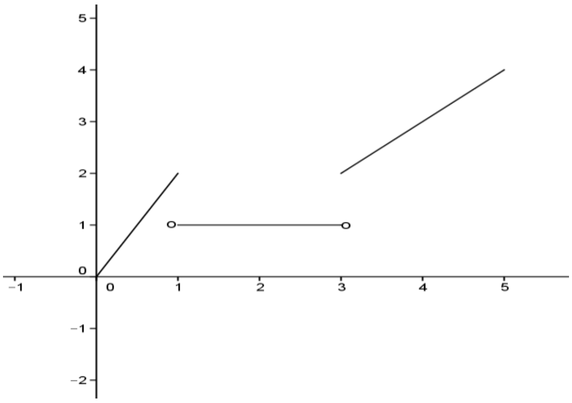
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β. Να αποδείξετε ότι $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\dfrac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right)$ για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της.

Γραφική Παράσταση - Συμμετρίες

14. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται στο διπλανό σχήμα:



15. Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις και από την γραφική παράσταση να βρεθεί το σύνολο τιμών τους σε κάθε μία περίπτωση.

α. $f(x) = |x - 2|$ **β.** $f(x) = |x^2 - 4|$ **γ.** $f(x) = \begin{cases} x+4, & x \geq 1 \\ -x+5, & x < 1 \end{cases}$

δ. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$ **ε.** $f(x) = e^x - 4$ **στ.** $f(x) = 2ημ(x - \frac{π}{2}),\ x \in [0, 2π]$

16. Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις και από την γραφική παράσταση να βρείτε το σύνολο τιμών τους σε κάθε μία περίπτωση.

α. $f(x) = |x - 4| + |x - 2|$ **β.** $f(x) = \ln(-x)$

γ. $f(x) = \begin{cases} e^x + 2, & x < 0 \\ 4x, & x > 0 \end{cases}$ **δ.** $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

17. Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x) = \sqrt{|x-2|} + 2$ **β.** $f(x) = |ημx|$ **γ.** $f(x) = |\,συν(x - \frac{π}{4})|$ **δ.** $f(x) = -e^x + 2$

18. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν κέντρο συμμετρίας το σημείο Ο(0,0).

α. $f(x) = x^3 + x$ **β.** $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + x^3$

γ. $f(x) = x|x|$ **δ.** $f(x) = 3ημ(x^5)$

19. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y.

α. $f(x) = x^4 + |x|$ **β.** $f(x) = συνx + \dfrac{1}{x^2}$

γ. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **δ.** $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

20. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία ε.

α. $f(x) = |x - 2|$, όπου ε: $x = 2$ **β.** $f(x) = x^2 - 6x + 14$, όπου ε: $x = 3$

21. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων έχουν κέντρο συμμετρίας το σημείο Κ.

α. $f(x) = \frac{8}{x-4} + 2$, $K(4,2)$ **β.** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$, $K(-1,2)$

22. Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f για τις οποίες ισχύει:

α. $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 14$ **β.** $g(x) = x^3 + \frac{11}{2}x^2 + \frac{17}{2}x + 3$

γ. $f^3(x) + f^2(x) + 2f(x) = x^2-2x,\ x \in \mathbb{R}$ **δ.** $\ln[e^{f(x)}+1] = x^2-2x+\ln 2$

23. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$f(x) = 2x^4 + 4x^2 + 12$ και $g(x) = 9x^3 - 10x^2 + 9x + 10$.

24. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = x^3 - 7x - 6$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

25. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^3 - 2x^2 - 10x - 8$ και της ευθείας ε: $y = 3x + 2$. Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ε;

26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log(2\cdot 4^x - 2\cdot 10^x)$ και $g(x) = \log(5\cdot 10^x - 5\cdot 25^x)$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g.

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f, g.

27. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$f(x) = 3^{2x+3} + 37\cdot 9^x$ και $g(x) = 16^{x+1} + 11\cdot 2^{4x}$

28. Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g όταν:

α. $f(x) = x + \log(1 + 2^x)$ και $g(x) = \log 6 + x\log 5$

β. $f(x) = ημx$ και $g(x) = \sqrt{3}συνx$, όταν $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

29. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f, g, όταν ισχύει:

$f^2(x) + g^2(x) + 2g(x)x^2 + x^4 + 4x^2 - 4xf(x) - 2f(x) + 4x + 1 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

30. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 2f^2(x) + 4f(x) = e^x - xe^x + x - 1$. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

31. Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g, οι οποίες έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f(x) + e^{2x} = g(x) + 2e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

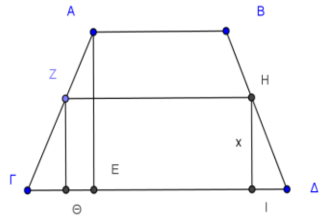
32. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση των συναρτήσεων της μορφής $f(x) = x^2 + (\lambda - 2)x + \lambda + 2$, διέρχεται από ένα σταθερό σημείο καθώς $\lambda \in \mathbb{R}$.

Εύρεση Συνάρτησης – Τύπος

33. Δίνεται ορθογώνιο με μήκος x και πλάτος y. Αν η περίμετρος του είναι 20cm, να εκφραστεί το εμβαδόν του ως συνάρτηση του μήκους. Για ποια τιμή του x γίνεται το εμβαδόν μέγιστο

34. Δίνεται κύκλος με ακτίνα ρ και περίμετρο L . Να εκφραστεί το εμβαδόν του ως συνάρτηση του L.

35. Ένα ορθογώνιο ΖΗΙΘ είναι εγγεγραμμένο σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με μεγάλη βάση ΓΔ = 10cm, μικρή ΑΒ =4cm και ύψος ΑΕ = 5cm. Να εκφράσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.



36. Να εξεταστεί αν η σχέση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η παρακάτω σχέση είναι συνάρτηση:

α. $f^2(x) + f(x) + 1 = 0$ **β.** $f^2(x^4) - f(4^x) + 2 = 0$ **γ.** $f(5-x) + f(x) = x+1$ **δ.** $x^2 f(x) = x^3 + 1$

37. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $xf(-x) + 3f(x) = x+2$, $x \in \mathbb{R}$.

38. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $4f(x) + \frac{1}{x} f(\frac{1}{x}) = x^2$, $x \in \mathbb{R}^*$.

39. Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f(\frac{x}{\sqrt{e}}) \leq 2 - \ln x \leq f(x) + \frac{1}{2}$, $x>0$

40. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(xy^2)+f(x)+f(y) = xy^2+x+4$, για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την τιμή f(1)

β. Να βρείτε τον τύπο της f

41. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x+2) \leq x+1 \leq f(x+4) - 2$.
Να βρείτε τον τύπο της f

42. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x+y) + f(x) + f(y) = x+y$, για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την τιμή f(0)

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή και να βρείτε τον τύπο της f

43. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(xf(y)) = x^2 f(y) + 1$, για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

44. Δίνεται άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $xf(x) \leq x^3 + x\text{συν}x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

45. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+1) - 3f(1-x) = x^2+x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Ίσες Συναρτήσεις – Πράξεις Συναρτήσεων

46. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+\beta}{x-1}$, $g(x) = \frac{2x^2+2\alpha x+\alpha}{2(x^2-1)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g

β. Για ποια τιμή των α, β ισχύει f = g ;

47. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2-\alpha x}{x+\alpha+3}$ και $g(x) = \frac{x^2+(\beta-2)x}{x-2\beta}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι συναρτήσεις είναι ίσες.

48. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g. Να εξετάσετε σε ποιες περιπτώσεις είναι ίσες. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει f(x) = g(x).

α. $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

β. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

γ. $f(x) = 2\ln(x-3)$ και $g(x) = \ln(x-3)^2$

δ. $f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$ και $g(x) = \sqrt{x}-2$

ε. $f(x) = \frac{x^2-2|x|+1}{|x|-1}$ και $g(x) = x - 1$

στ. $f(x) = \ln\frac{x-2}{x+3}$ και $g(x) = \ln(x-2) - \ln(x+3)$

49. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, $f(x) = x^2 - 4x + 3$ και $g(x) = x^2 - 6x$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις f+g, f - g, fg, $\frac{f}{g}$.

50. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x<2 \\ 3x-2, & x>4 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x-1, & x<3 \\ -2x+4, & x \geq 5 \end{cases}$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις f+2g, f·g, $\frac{f}{g}$.

51. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, $f(x) = \ln(x-2)(x-3)$ και $g(x) = -\ln(x-2)$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις f+2g, f·g, $\frac{f}{g}$.

52. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) + 2x^2(f+g)(x) + g^2(x) + 2x^4 = 0$. Να δείξετε ότι f = g.

53. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) \leq 2(f\cdot g)(x) - 2g^2(x) + 2xg(x) - x^2$. Να δείξετε ότι $f = g = x$.

Σύνθεση Συναρτήσεων

54. Να βρείτε τη σύνθεση f∘g των συναρτήσεων:

α. $f(x) = -2x+1$, $x \in [-2,3]$, $g(x) = 3x - 2$, $x \in (1, 5)$

β. $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $g(x) = -x+4$

γ. $f(x) = \ln(x-5)$, $g(x) = e^x + 3$ **δ.** $f(x) = \sqrt{-x+12}$, $g(x) = \sqrt{x^2-4}$

ε. $f(x) = \begin{cases} x+3, & x>2 \\ -x+1, & x<0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2x-1, & x>1 \\ x+4, & x<-1 \end{cases}$ **στ.** $f(x) = x^2+1$, $g(x) = \begin{cases} 3x, & x<0 \\ x-2, & x>2 \end{cases}$

η. $f(x) = \sqrt{-2x+1}$, $g(x) = ημx$ **ζ.** $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x-\sqrt{x-1}}$

55. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x+1$. Να βρείτε τη σύνθεση:

α. $f \circ f \circ f$ **β.** $f \circ \frac{1}{f}$ **γ.** $\sqrt{f} \circ \sqrt{f}$

56. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων.

α. $f(x) = ημ^2(x^3+2)$ **β.** $f(x) = σφ(\ln^2 x)$ **γ.** $f(x) = \sqrt[3]{e^{ημx} + 4}$

δ. $f(x) = \frac{2}{συν^3 x + 4}$ **ε.** $f(x) = e^{\sqrt[5]{(x+1)^3}} + 9$ **στ.** $f(x) = \frac{5}{\sqrt{\ln^2 x + 2}}$

57. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(2x+1) = x^2 - 4x + 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης.

58. Να βρείτε τη συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:

α. $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 7$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = 2 - x$

β. $(g \circ f)(x) = 2 - ημx$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = (x-1)^2$ και $f(x) \leq 1$

γ. $(f \circ g)(x) = x^3 + 4x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = \ln 3x$

δ. $(g \circ f)(x) = x^3 + 2x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 3x + 2$, και $D_f = \mathbb{R}$

ε. $(f \circ g)(x) = 3ημ(x^2 + 2) + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = \ln x - 1$

στ. $(g \circ f)(x) = x^4 + 3x + 1$ και $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $(f(x) \neq 2,\ x \neq 0)$

ζ. $g(x) = 2 + \ln x$, $x>0$, αν $(f \circ g)(x) = 3x + 2\ln x$

59. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,2] \to \mathbb{R}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.

α. $g(x) = f(2\ln x + 3)$ **β.** $h(x) = f(x^3+1)$ **γ.** $k(x) = f(\frac{x-2}{x+3})$ **δ.** $b(x) = f(e^x - 2)$

ε. $φ(x) = f(x+2) + f(\sqrt{x} - 1)$ **στ.** $σ(x) = f(\sqrt{x^2+1} - 1)$ **ζ.** $m(x) = f(εφx + 1)$

60. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = αx+β$, $g(x) = x+2$. Να βρείτε τους α, β, ώστε $f \circ g = g \circ f$.

61. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει: $(f \circ g)(x) = x^2 - 7x + 16$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $(g \circ f)(4) = 4$. Να δείξετε ότι $f(4) = g(4)$.

62. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ για τις οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) = xf(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε την τιμή f(1).

ΤΕΣΤ 1ο

Θέμα Α: Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \sqrt{4-\sqrt{2+x}}$ και $g(x) = \sqrt{2-x}$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους

β. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

Θέμα Β: Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $D_f = [-2,2)$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(\frac{2}{x-1}) + f(\sqrt{x}-3)$

Θέμα Γ: Να βρεθεί η σύνθεση f∘g των συναρτήσεων:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x>1 \\ -x+3, & x<0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = x+2$$

ΤΕΣΤ 2ο

Θέμα Α: Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

$$f(x) = \begin{cases} x+5, & x<0 \\ -x-5, & x\geq 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{|x^2-25|}{x-5}$$

Θέμα Β: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+x}{\beta+x}$. Να εξεταστεί αν υπάρχουν α, β ∈ ℝ, ώστε να ισχύει (f∘f)(x) = x.

Θέμα Γ: Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

xf(x-2) + 3f(2-x) = x+1, για κάθε x ∈ ℝ.