1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα

ΘΕΩΡΙΑ

● Μη Γραμμικό Σύστημα

Αν κάποια από τις εξισώσεις ενός συστήματος δεν είναι γραμμική, τότε το σύστημα λέγεται μη γραμμικό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

- Για την επίλυση των μη γραμμικών συστημάτων συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης. Λύνουμε, δηλαδή, την πιο «εύκολη» από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο, και αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε στην άλλη. Αν οι συντελεστές των αγνώστων είναι αντίθετοι, είναι προτιμότερη η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών.
- Για τη γεωμετρική ερμηνεία των αποτελεσμάτων της λύσης ενός συστήματος, πρέπει να γνωρίζουμε ότι οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν:

  α) Η εξίσωση $x^2 + y^2 = ρ^2$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ.

  β) Οι εξισώσεις $y = αx^2$, $x = αy^2$ παριστάνουν παραβολή με κορυφή το σημείο Ο(0,0).

  γ) Η εξίσωση $y = \frac{α}{x}$ παριστάνει υπερβολή.

  δ) Η εξίσωση $x^2 - y^2 = α^2$ παριστάνει υπερβολή.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Η εξίσωση $2x + 3y^2 = 4$ είναι μη γραμμική. Σ ☐ Λ ☐

ii) Το σύστημα των εξισώσεων: $\begin{cases} y = 2x^2 \\ x = 3y^2 \end{cases}$ έχει λύση. Σ ☐ Λ ☐

iii) Η ευθεία ε: $y = 4$ τέμνει τον κύκλο C: $x^2 + y^2 = 1$. Σ ☐ Λ ☐

iv) Το σύστημα των εξισώσεων: $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases}$ είναι αδύνατο. Σ ☐ Λ ☐

v) Το σύστημα των εξισώσεων: $\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση. Σ ☐ Λ ☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α ομάδα

2. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} y = x^2 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$ και να γίνει η γεωμετρική ερμηνεία των λύσεων.

3. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} y = 2x^2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$ και να γίνει η γεωμετρική ερμηνεία των λύσεων.

4. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία ε: $y = x + \lambda^2$ και η παραβολή C: $y = -4x^2$ να έχουν ένα κοινό σημείο.

5. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 24 \end{cases}$ και να γίνει η γεωμετρική ερμηνεία των λύσεων.

6. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = -9 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x^2 + y^2 - 2xy = 9 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 19 \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$

7. Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας ε: $y = -x$ και του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 2$.

8. Να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας ε: $y = x$ και της υπερβολής C: $y = \frac{4}{x}$.

9. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής C: $y = x^2$ και του κύκλου C′: $x^2 + y^2 = 20$.

10. Να βρείτε τις πλευρές του ορθογωνίου που έχει περίμετρο 16m και εμβαδόν $7m^2$.

11. Να βρείτε τα κοινά σημεία των κύκλων C: $x^2 + y^2 = 1$ και C′: $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

12. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} \\ x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y + xy = 19 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Β ομάδα

13. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 8 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = -2 \end{cases}$

14. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 4 \\ x^2 + y^2 + 4xy = 24 \end{cases}$ β) $\begin{cases} (x + y)^2 - 3x - 3y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = 5 \\ \dfrac{2x-5y}{xy} = 3 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x+y=6 \\ -x+\sqrt{y}=0 \end{cases}$

15. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 2x^2+xy=30 \\ y^2+2xy=4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^3+y^3=8 \\ x+y=2 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x^2+3xy+y^2=61 \\ x^2-xy+y^2=13 \end{cases}$

16. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} (x+y^2)^2+3(x+y^2)-4=0 \\ x+y=1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^3+x^2y=16 \\ y^3+y^2x=4 \end{cases}$

17. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει μοναδική λύση:

$\begin{cases} x^2-2xy+y^2=4x+y+1 \\ y=2x+\kappa \end{cases}$

18. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ορθογώνιο με διαγώνιο μήκους 6m και περίμετρο 20m.

19. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η ευθεία ε: $y = x + \kappa$ και ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 1$ τέμνονται σε δύο σημεία.

20. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ $\in \mathbb{R}$, για τις οποίες η παραβολή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο με τεταγμένη 6 και τον άξονα x′x στα σημεία με τετμημένες 1 και 3.

21. Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν 32m^2. Αν η μια διάσταση του αυξηθεί κατά 2m και η άλλη μειωθεί κατά 3m, προκύπτει ορθογώνιο με εμβαδόν 30m^2. Να βρείτε τις διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου.

22. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\lambda > 0$), ώστε ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 8$ και η ευθεία ε με εξίσωση ε: $y = x + \lambda$ να εφάπτονται σε ένα σημείο Α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α, καθώς και την εξίσωση της ευθείας ε.

23. Να βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς με άθροισμα 23, αν γνωρίζουμε ότι το πηλίκο της διαίρεσης τους ισούται με το μικρότερο από τους δύο και το υπόλοιπο της διαίρεσης τους είναι 3.

24. Να βρείτε δύο αριθμούς, αν γνωρίζουμε ότι διαφέρουν κατά 4 και το τετράγωνο του πρώτου αυξημένο κατά το διπλάσιο του δευτέρου ισούται με 16.

25. Δύο βρύσες γεμίζουν και οι δύο μαζί μια δεξαμενή σε 6 ώρες. Αν η δεύτερη γεμίζει μόνη της τη δεξαμενή σε 5 ώρες λιγότερες απ′ όσο χρειάζεται η πρώτη, να βρείτε σε πόσες ώρες η κάθε μία βρύση γεμίζει μόνη της τη δεξαμενή.

ΤΕΣΤ 1ο

ΘΕΜΑ 1ο: Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Κάθε μη γραμμικό σύστημα έχει πάντα λύση. Σ ☐ Λ ☐

ii) Το παρακάτω σύστημα είναι μη γραμμικό: $\begin{cases} x + y^3 = 4 \\ xy = 8 \end{cases}$ Σ ☐ Λ ☐

iii) Το σύστημα: $\begin{cases} xy = 4 \\ xy = -4 \end{cases}$ έχει λύση. Σ ☐ Λ ☐

iv) Ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 4$ και η παραβολή C′: $y = x^2$ έχουν δύο κοινά σημεία. Σ ☐ Λ ☐

ΘΕΜΑ 2ο: Δίνεται η ευθεία ε, με εξίσωση ε: $x + y = λ$, $λ \in \mathbb{R}$ και ο κύκλος C με εξίσωση C: $(x - 1)^2 + y^2 = 25$. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του λ τη θέση της ευθείας ε και του κύκλου C.

ΤΕΣΤ 2ο

ΘΕΜΑ 1ο: Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε: $x - y = 0$ και του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 4$.

ΘΕΜΑ 2ο: Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 - 2λy = -7 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του $λ \in \mathbb{R}$, ώστε το παραπάνω σύστημα να έχει μοναδική λύση.

β) Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να βρείτε τη μοναδική λύση.

ΘΕΜΑ 3ο: Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα 5, όταν η διαφορά των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του ισούται με το άθροισμα των κάθετων πλευρών του.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ☹

1. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} x+\lambda y=2 \\ -\lambda x+y=\lambda \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_o, y_o).

γ) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε το σημείο $A(x_o, y_o)$ να ανήκει στην ευθεία ε: $y = x + 1$.

2. Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} x+y=4\lambda+2 \\ x-y=2\lambda \end{cases}$$

α) Να βρείτε τη λύση του συστήματος

β) Αν (x_o, y_o) είναι η λύση του συστήματος, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η παράσταση $A = -x_o^2 + 2y_o - 8$ λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή τιμή.

3. Δίνονται οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 με εξισώσεις ε_1: $x + y = 2$, ε_2: $x + \kappa y = 4$ και ε_3: $x - \lambda y = 1$.

α) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των κ, λ, ώστε οι τρεις ευθείες να διέρχονται από το ίδιο σημείο ($\kappa \neq 1$, $\lambda \neq -1$).

β) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ, ώστε το κοινό τους σημείο να ανήκει στον κύκλο C: $x^2 + y^2 = 4$

4. Δίνεται κύκλος με εξίσωση C: $x^2 + y^2 = 9$ και η υπερβολή C_1: $y = \frac{\lambda}{x}$. Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε ο κύκλος και η υπερβολή να έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία.

5. Δίνεται σύστημα 2 x 2 για το οποίο ισχύει:

$$\begin{cases} D_x+\lambda D_y=D \\ D_x+D_y=2D \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες έχουμε μοναδική λύση (x,y).

β) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η λύση (x, y) να ικανοποιεί τη σχέση $|x - y| < 4$.

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \kappa x + \lambda = 0$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}^*$ και το σύστημα:

$$\begin{cases} 4x+\kappa^2 y=4 \\ x+\lambda y=8 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι, αν η εξίσωση έχει ρίζες άνισες, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.

β) Αν η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, να βρείτε πόσες ρίζες έχει το σύστημα. ☺

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο: Α. Τι λέγεται γραμμική εξίσωση;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

i) Η ευθεία με εξίσωση ε: $x + \lambda^2 y = 3$ διέρχεται από το σημείο Α(4,1). Σ ☐ Λ ☐

ii) Το 2 x 2 γραμμικό σύστημα για το οποίο $D \cdot D_x \cdot D_y \neq 0$ έχει μοναδική λύση. Σ ☐ Λ ☐

iii) Οι ευθείες ε: $x + 2y = 1$ και ε′: $2x + y = 1$ είναι παράλληλες. Σ ☐ Λ ☐

iv) Οι γραμμές C: $y = \frac{1}{x}$ και ε: $y = x$ τέμνονται σε δύο σημεία. Σ ☐ Λ ☐

v) Οι γραμμές C_1: $yx = 1$, C_2: $yx = -1$ έχουν κοινά σημεία. Σ ☐ Λ ☐

ΘΕΜΑ 2ο: Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x + 3y = 2 \\ 2x + y = \lambda \end{cases}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση.

β) Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_o, y_o).

γ) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε το σημείο $A(x_o, y_o)$ να βρίσκεται στην ευθεία ε με εξίσωση ε: $y = x - 1$.

ΘΕΜΑ 3ο: α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy + 4 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

β) Αν (x_1, y_1), (x_2, y_2) είναι οι λύσεις του ερωτήματος α) να εξετάσετε αν τα $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ είναι σημεία του κύκλου C: $x^2 + y^2 = 10$.

ΘΕΜΑ 4ο:

Ένας έμπορος αγόρασε εμπόρευμα αξίας 10.000 € και θα το πλήρωνε σε χαρτονομίσματα των 50€ και 100€. Κατά τη διαδικασία της μέτρησης, όμως, δεν υπολόγισε σωστά και έδωσε χαρτονομίσματα των 50€ αντί των 100€ και των 100€ αντί των 50€. Με αυτό τον τρόπο βρέθηκε να δίνει ποσό μικρότερο κατά 2.000€. Να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 50€ και πόσα των 100 €, έπρεπε να δώσει για την πληρωμή του ποσού των 10.000€.