ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.1 Μονοτονία - Ακρότατα - Συμμετρίες Συνάρτησης

ΘΕΩΡΙΑ

● **Γνησίως Αύξουσα**

Λέγεται η συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$. Συμβολίζουμε f ↗ στο Δ.

● **Γνησίως Φθίνουσα**

Λέγεται η συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$. Συμβολίζουμε f ↘ στο Δ.

● **Ελάχιστο (Ολικό)**

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) ελάχιστο όταν: $f(x) \geq f(x_o)$ για κάθε $x \in A$. (Συμβολίζουμε $\min f(x) = f(x_o)$).

● **Μέγιστο (Ολικό)**

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) μέγιστο όταν: $f(x) \leq f(x_o)$ για κάθε $x \in A$. (Συμβολίζουμε $\max f(x) = f(x_o)$).

● **Άρτια Συνάρτηση**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, θα λέγεται άρτια όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.

● **Περιττή Συνάρτηση**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, θα λέγεται περιττή όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$.

● **Γνησίως Μονότονη**

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται γνησίως μονότονη στο Δ.

● **Ολικά Ακρότατα**

Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται ολικά ακρότατα.

● **Σταθερή Συνάρτηση**

Μια συνάρτηση f λέγεται σταθερή αν ισχύει $f(x) = c$, για κάθε $x \in A$ και $c \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

Μονοτονία

- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha = 0$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- Μια συνάρτηση f είναι δυνατόν να είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα Δ_1, Δ_2 του πεδίου ορισμού της με το ίδιο είδος μονοτονίας και να μην είναι γνησίως μονότονη στην ένωση $\Delta_1 \cup \Delta_2$. π.χ. $f(x) = \frac{1}{x}$
- Για τη **μελέτη της μονοτονίας** μιας συνάρτησης f στο διάστημα Δ, συνήθως ακολουθούμε τους παρακάτω τρόπους:

  i) Με τον ορισμό: Υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$ με $x_1, x_2 \in \Delta$ και κατασκευαστικά βρίσκουμε τη ανισωτική σχέση μεταξύ των $f(x_1)$, $f(x_2)$.

  ii) Κατασκευάζουμε το λόγο μεταβολής $\lambda = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, με $x_1, x_2 \in \Delta$ και $x_1 \neq x_2$
  - Αν $\lambda > 0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.
  - Αν $\lambda < 0$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.
  - Αν $\lambda = 0$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.
- Όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι ένωση διαστημάτων, τότε μελετούμε τη μονοτονία της f σε κάθε διάστημα και κατόπιν στην ένωσή τους.
- Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα ($\kappa \in \mathbb{R}$).
- Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο A, τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x′x το πολύ μία φορά.
- Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$, τότε $f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$.
- Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$, τότε $f(x_1)<f(x_2) \Leftrightarrow x_1>x_2$.
- Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A και $f(x_o) = 0$, $x_o \in A$, τότε για $x < x_o$ έχουμε $f(x) < 0$ και για $x > x_o$ έχουμε $f(x) > 0$ (αντίστροφα για γνησίως φθίνουσα).
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, όταν το x «κινείται» δεξιά, η καμπύλη της f «ανεβαίνει» και, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε «κατεβαίνει».
- Οι συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^\nu$, με $\nu \in \mathbb{N}^*$ περιττός αριθμός, είναι γνησίως αύξουσες στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Ακρότατα

- Μια συνάρτηση ενδέχεται να έχει μέγιστο και ελάχιστο, ή μόνο ελάχιστο, ή μόνο μέγιστο, ή να μην έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.
- Αν f γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\max f(x) = f(\beta)$ και $\min f(x) = f(\alpha)$ στο $[\alpha,\beta]$.
- Αν f γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\max f(x) = f(\alpha)$ και $\min f(x) = f(\beta)$ στο $[\alpha,\beta]$.
- Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα (α,β), τότε σ' αυτό το διάστημα δεν έχει ακρότατα.
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (ή φθίνουσα) στο $[\alpha,x_o]$ και γνησίως φθίνουσα (ή αύξουσα) στο $[x_o,\beta]$, τότε παρουσιάζει στο x_o μέγιστο το $f(x_o)$ (ή ελάχιστο) αντίστοιχα.
- Για να δείξουμε ότι ο αριθμός κ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο Δ, αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) \le \kappa$ για κάθε $x \in A$. Ομοίως, αν είναι ελάχιστο, δείχνουμε ότι $f(x) \ge \kappa$.
- Για την **εύρεση των ακρότατων** μιας συνάρτησης στο Α, κατασκευάζουμε τη συνάρτηση και προσπαθούμε να καταλήξουμε σε μια σχέση της μορφής $f(x) \ge \kappa$ ή $f(x) \le \kappa$ για κάθε $x \in A$, **όπου $\kappa = f(x_o)$ για κάποιο $x_o \in A$.**
- Είναι δυνατόν μια συνάρτηση να παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο σε περισσότερα από ένα σημεία του πεδίου ορισμού της, π.χ. f(x)= ημx.
- Αν f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$, τότε δεν έχει ακρότατα.
- Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε το σημείο $A(x_o,f(x_o))$ είναι το «ψηλότερο» σημείο της καμπύλης της f (αντίστοιχα «χαμηλότερο» όταν παρουσιάζει ελάχιστο).
- Αν κ είναι ακρότατη τιμή της συνάρτησης $f: \Delta \to \mathbb{R}$, τότε οι θέσεις στις οποίες παρουσιάζεται το ακρότατο βρίσκονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $x \in \Delta$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ δεν έχει ακρότατα.
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$ $(\alpha > 0)$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ με τιμή $f(0) = 0$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2$ $(\alpha < 0)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$ με τιμή $f(0) = 0$.
- Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ με τιμή $f(0) = 0$.
- Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ δεν έχει ακρότατα.
- Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$ $(\alpha \ne 0)$ δεν έχει ακρότατα.

Άρτια - Περιττή Συνάρτηση

- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y′y.
- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- Συνήθως μια πολυωνυμική συνάρτηση που περιέχει μόνο δυνάμεις του x με άρτιους εκθέτες είναι άρτια και μόνο με περιττούς εκθέτες είναι περιττή, π.χ. $y = x^6$, $y = x^5$.
- Αν μια συνάρτηση είναι περιττή και το $0 \in A$, τότε $f(0) = 0$.
- Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε τα συμμετρικά τμήματα της καμπύλης της f ως προς τον άξονα y′y έχουν αντίθετο είδος μονοτονίας.
- Αν μια συνάρτηση είναι άρτια και στη θέση x_0 παρουσιάζει μέγιστο ή ελάχιστο, τότε και στη θέση $-x_0$ παρουσιάζει επίσης μέγιστο ή ελάχιστο, αντίστοιχα.
- Αν η συνάρτηση f είναι άρτια στο σύνολο A, τότε δεν είναι γνησίως μονότονη στο A.
- Αν η συνάρτηση f είναι περιττή στο σύνολο A, τότε τα συμμετρικά τμήματα της καμπύλης της f, ως προς την αρχή των αξόνων, έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.
- Αναγκαία προϋπόθεση για να είναι άρτια ή περιττή μια συνάρτηση, είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης να είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν.
- Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση δεν είναι άρτια (ή περιττή), αρκεί να:
  i) Υπάρχει $x \in A$ τέτοιο, ώστε $-x \notin A$.
  ii) Υπάρχει $x \in A$ τέτοιο, ώστε $f(x) \neq f(-x)$ (ή αντίστοιχα $f(-x) \neq -f(x)$).
- Με την περιστροφή της καμπύλης μιας περιττής συνάρτησης κατά 180°, παρατηρούμε ότι προκύπτει ακριβώς η ίδια καμπύλη.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι στο σύνολο $\mathbb{R}$:

α) γνησίως αύξουσα β) γνησίως φθίνουσα γ) σταθερή

ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $f(x) = κ$, $κ \in \mathbb{R}$ έχει:

α) το πολύ μία ρίζα β) καμία ρίζα γ) ακριβώς μία ρίζα

iii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και τα σημεία Α(1,3), Β(2,7) ανήκουν στη καμπύλη της f, τότε:

α) είναι γνησίως αύξουσα β) είναι γνησίως φθίνουσα γ) δε γνωρίζουμε τη μονοτονία

iv) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και $f(5) = 8$, τότε η ανίσωση $f(x) \leq 8$ έχει λύση:

α) $x < 5$ β) $x > 5$ γ) $x \geq 5$ δ) $x \leq 5$

v) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$ και $f(1) = 3$, τότε πιθανό σημείο της καμπύλης της f είναι:

α) Α(4,16) β) Β(2,8) γ) Γ(3,12) δ) Δ(-1,6)

vi) Η συνάρτηση $f(x) = -2x + 8$ είναι:

α) γνησίως αύξουσα β) γνησίως φθίνουσα γ) σταθερή

vii) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα αν ισχύει:

α) $f(x_1) < f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$

β) $f(x_1) \leq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$

γ) $f(x_1) > f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$

δ) Αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ και ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

viii) Όταν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$, τότε:

α) $f(1) \leq f(2) \leq f(3)$ β) $f(1) < f(2) < f(3)$ γ) $f(1) > f(2) > f(3)$

ix) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(4) = 0$, τότε:

α) $f(-1) < 0$ β) $f(2) < 0$ γ) $f(5) > 0$ δ) $f(0) > 0$

x) Αν η καμπύλη της f τέμνει ακριβώς δύο φορές τον άξονα x΄x, τότε:

α) είναι γνησίως αύξουσα β) είναι γνησίως φθίνουσα γ) δεν είναι γνησίως μονότονη

xi) Αν συνάρτηση $f(x) = 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση είναι:

α) γνησίως αύξουσα β) γνησίως φθίνουσα γ) σταθερή

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Αν f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε $f(\sqrt{2}) < f(\sqrt{3})$. Σ ☐ Λ ☐

ii) Αν f είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$ και $f(0) = 0$, τότε $f(3) > 0$. Σ ☐ Λ ☐

iii) Αν f είναι γνησίως μονότονη στο Α, τότε η εξίσωση $f(x) = κ$, $κ \in \mathbb{R}$, έχει ακριβώς μία ρίζα $x_o \in A$. Σ ☐ Λ ☐

iv) Αν f είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο R, τότε $f(4) - f(1) > 0$. Σ ☐ Λ ☐

v) Αν f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η $-f$ είναι γνησίως αύξουσα. Σ ☐ Λ ☐

vi) Η συνάρτηση $f(x) = -x^5$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$. Σ ☐ Λ ☐

vii) Η συνάρτηση $f(x) = 5x - 8$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Σ ☐ Λ ☐

viii) Αν f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και $f(3) < f(10)$, τότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Σ ☐ Λ ☐

ix) Αν $f(x_1) < f(x_2)$, τότε $x_1 < x_2$, με $x_1, x_2 \in A$. Σ ☐ Λ ☐

x) Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Σ ☐ Λ ☐

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει μέγιστο το 4, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

α) $f(x) \geq 4$ β) $f(x) < 4$ γ) $f(x) - 4 \leq 0$ δ) $f(x) > 4$

ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (1,4), τότε:

α) έχει ελάχιστο το f(4) β) έχει μέγιστο το f(1) γ) δεν έχει ακρότατα

iii) Ο αριθμός κ είναι μέγιστο της $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ όταν:

α) $f(x) \leq κ$ για κάθε $x \in A$ και $κ = f(x_o)$, όπου $x_o \in A$

β) $f(x) \geq κ$ για κάθε $x \in A$ και $κ = f(x_o)$, όπου $x_o \in A$

γ) $κ = f(x_o)$ για κάποιο $x_o \in A$

δ) τίποτε από τα παραπάνω

iv) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο [1,4], τότε έχει μέγιστο:

α) τον αριθμό f(1) β) τον αριθμό f(4) γ) κανέναν αριθμό

v) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο το 8 στη μοναδική θέση $x_o = 2$, τότε η εξίσωση $f(x + 1) = 8$ έχει λύση:

α) $x = 2$ β) $x = 1$ γ) $x = 0$ δ) $x = -1$

vi) Αν η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή ίση με 4, τότε η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι:

α) αδύνατη β) έχει δύο λύσεις γ) έχει μία λύση

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Αν Α = [α,β] και f (β) είναι μέγιστο της f, τότε f γνησίως μονότονη στο Α. Σ ☐ Λ ☐

ii) Αν Α=[α,β) και f γνησίως αύξουσα, τότε η ελάχιστη τιμή της f είναι η f(α). Σ ☐ Λ ☐

iii) Η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 1$ έχει ελάχιστη τιμή το 1. Σ ☐ Λ ☐

iv) Μια συνάρτηση γνησίως φθίνουσα έχει πάντα ελάχιστο. Σ ☐ Λ ☐

v) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o \in A$, τότε η συνάρτηση -f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o \in A$. Σ ☐ Λ ☐

vi) Η συνάρτηση $|f(x)|$ έχει πάντα ελάχιστη τιμή. Σ ☐ Λ ☐

vii) Αν ο αριθμός κ είναι μέγιστο της συνάρτησης f, τότε $f(x) < \kappa$ για κάθε $x \in A$. Σ ☐ Λ ☐

5. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = x^4 + x^2 + 1$. Άρτια είναι στο διάστημα:

α) [-α,α] β) [-α,α] γ) (-α,α] δ) (-α,α+1]

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + \alpha}$ είναι περιττή όταν:

α) $\alpha \geq 0$ β) $\alpha < 0$ γ) για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

iii) Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια και η καμπύλη της διέρχεται από το σημείο Α(2,6), τότε θα διέρχεται και από το σημείο:

α) Β(2,-6) β) Γ(-2,6) γ) Δ(6,2) δ) Ε(2,0)

iv) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = x^5 + x$ είναι συμμετρική:

α) ως προς τον άξονα x′x β) ως προς την αρχή Ο γ) ως προς τον άξονα y′y

v) Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και η καμπύλη της διέρχεται από το σημείο Α(-3,-4), τότε θα διέρχεται και από το σημείο:

α) Β(3,-4) β) Γ(-3,4) γ) Δ(3,4) δ) Ε(3,2)

vi) Ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττή:

α) $f(x) = 5$ β) $f(x) = -2x+5$ γ) $f(x) = x^{2015}$ δ) $f(x) = x^3 + x^2$

6. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Αν η συνάρτηση f είναι άρτια στο σύνολο Α, τότε και η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι επίσης άρτια στο Α. Σ ☐ Λ ☐

ii) Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = x^{2\nu}$ είναι άρτια για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Σ ☐ Λ ☐

iii) Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = x^{2\nu+1}$ είναι περιττή για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Σ ☐ Λ ☐

iv) Αν η συνάρτηση f είναι περιττή, τότε $f(0) = 0$, $(0 \in A)$. Σ ☐ Λ ☐

v) Αν η συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι περιττή. Σ ☐ Λ ☐

vi) Η συνάρτηση $f(x) = x^4$ είναι άρτια στο $[-1, 2]$. Σ ☐ Λ ☐

vii) Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και έχει μέγιστο στο x_o, τότε έχει μέγιστο και στο $-x_o$. Σ ☐ Λ ☐

viii) Κάθε συνάρτηση με τύπο $f(x)=\sqrt{x^\nu - \alpha}$ με $\alpha > 0$ δεν είναι άρτια ($\nu \in \mathbb{N}^*$). Σ ☐ Λ ☐

ix) Κάθε περιττή συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y′y. Σ ☐ Λ ☐

x) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε δεν είναι άρτια. Σ ☐ Λ ☐

xi) Κάθε συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. Σ ☐ Λ ☐

xii) Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = |x + \alpha| - |x - \alpha|$ είναι περιττή, $\alpha \in \mathbb{R}$. Σ ☐ Λ ☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α ομάδα

7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων και να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία

α) $f(x) = -4x + 5$ β) $f(x) = x^3 + 7x + 6$ γ) $f(x) = -2x^2 + 1$

δ) $f(x) = \sqrt{x-4}$ ε) $f(\chi) = -\sqrt{x-6}$ στ) $f(x) = -2x^5 - 4x^3 + 5$

8. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 0 \\ -x^3, & x \le 0 \end{cases}$$

9. Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 3|x - 2|$ β) $f(x) = \dfrac{4}{x^3}$, $x \in (0,+\infty)$ γ) $f(x) = \dfrac{-4}{x-2}$, $x \in (2,+\infty)$

δ) $f(x) = x^2 + 4$, $x \in [0,+\infty)$ ε) $f(x) = x^2 + 4x + 10$ στ) $f(x) = -x^2 + 8x + 12$

10. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(3) = 0$. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f.

11. Δίνεται συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, γνησίως φθίνουσα με f(2) = 0. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 + x) < 0$

12. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη με τύπο $f(x) = αx^3 + β$ και διέρχεται η γραφική της παράσταση από τα σημεία Α(1, -7), Β(3,19), τότε:

α) Να προσδιορίσετε τα α, β.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 19$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει f(2) = 0.

α) Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών: f(0), f(-1), f(-3), f(4), f(1).

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 + 1) < f(3x - 1)$.

14. Έστω μια συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα:

α) Να δείξετε ότι: $x^2 + 1 \geq 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι: $f(x^2 + 1) \leq f(2x)$.

15. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη με $f(x^2 + 4) \leq f(4x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε ως τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(|x - 4|) > f(8)$.

16. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο $y_o = 4$. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 - 6x - 7) > 4$.

17. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων με τους παρακάτω τύπους:

α) $f(x) = 3x^2 + 5$ β) $f(x) = |x - 2| + 8$ γ) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 4$

δ) $f(x) = 4 - x^2$ ε) $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 10}$ στ) $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x - 2}}$

18. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + 4x + 5$ έχει ελάχιστη τιμή y =1.

19. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = - 4x + 5$, αν $x \in [-1,3]$ β) $f(x) = x^3 - 8$, αν $x \in [1,3]$

γ) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$, αν $x \in [4,+\infty)$ δ) $f(x) = x^2 + 4$, αν $x \in [0,3]$

20. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 10 - |x - 4|$ β) $f(x) = 6 - \sqrt{x - 4}$ γ) $f(x) = 2 - (x - 1)^2$

δ) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 10$ ε) $f(x) = x^2 - 6x + 14$ στ) $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

21. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 12 και το γινόμενο τους είναι μέγιστο.

22. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{6x}{x^2+9}$ έχει μέγιστο για x = 3.

23. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -\frac{x^2+5}{x^2+3}$ έχει ελάχιστη τιμή το $-\frac{5}{3}$ και να βρείτε την τιμή του x για την οποία λαμβάνει αυτή.

24. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = (x-2)^2 + (x+2)^2$ β) $f(x) = |x-2| + |x+2|$ γ) $f(x) = x^3 - 6x$

25. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = |x-4| - |x+4|$ β) $f(x) = \frac{1}{x^4} + 1$ γ) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

26. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ β) $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x^2 + 4}$ γ) $f(x) = x^4\sqrt{x^2 + 5}$

δ) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-9}}$ ε) $f(x) = \sqrt{x-2}$ στ) $f(x) = \frac{4}{x+3}$

27. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ β) $f(x) = \frac{x^3+6x}{x^4+x^2+5}$

γ) $f(x) = \frac{x^4}{|x|-4}$ δ) $f(x) = x^3|x|$

28. Δίνεται η περιττή συνάρτηση f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^3 + x + α$ και $α \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του α.

29. Έστω f συνάρτηση άρτια με τύπο $f(x) = x^2 + αx + β$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(-2,5), να βρείτε τους αριθμούς α, β.

Β ομάδα

30. Δίνεται η άρτια συνάρτηση f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι και η συνάρτηση -f είναι επίσης άρτια στο σύνολο $\mathbb{R}$.

31. Δίνεται η άρτια συνάρτηση f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι επίσης άρτια στο σύνολο $\mathbb{R}$.

32. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν f, g είναι γνησίως αύξουσες, τότε να δείξετε ότι και η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = f(x) + g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$.

33. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Α, να δείξετε ότι η συνάρτηση - f είναι γνησίως αύξουσα στο Α.

34. Να εξετάσετε τη μονοτονία της f με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 5$ για $x \geq 2$.

35. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή στο σύνολο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $f(0) = 0$.

36. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^5 + x - 2$.

α) Να εξετάσετε τη μονοτονία της f.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x^2 + 3x + 3) > 0$.

37. Δίνεται συνάρτηση f άρτια στο σύνολο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + c$ είναι επίσης άρτια στο σύνολο $\mathbb{R}$ για κάθε πραγματικό αριθμό c .

38. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (\kappa^3 - \kappa)x + 10$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του κ, ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο $\mathbb{R}$.

39. Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = -\frac{4}{x-2}$ στα διαστήματα $(-\infty,2)$ και $(2,+\infty)$.

40. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x + \beta$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β, ώστε η συνάρτηση f να είναι περιττή.

41. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β, ώστε η συνάρτηση f να είναι άρτια.

42. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 1 \\ -3x + 8, & x < 1 \end{cases}$$

43. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 1$ με τιμή -10. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, και να το προσδιορίσετε.

44. Δίνεται ευθεία ε με εξίσωση ε: $y = x - 2$. Να βρείτε τα σημεία τομής της ε με τους άξονες, καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου Μ της ευθείας ε που απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

45. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^4 - 1) + x^2 - x =$
$= 6 + f(1 - x^4)$.

46. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $f(x + y) + f(x - y) = xy$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή στο σύνολο $\mathbb{R}$.

47. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 6x - 10$ παρουσιάζει μέγιστο για $x = 3$.

ΤΕΣΤ 1ο

ΘΕΜΑ 1ο: Α. Πότε μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Κάθε συνάρτηση έχει μέγιστο και ελάχιστο. Σ ☐ Λ ☐

ii) Δεν υπάρχει συνάρτηση να είναι άρτια και περιττή. Σ ☐ Λ ☐

iii) Κάθε γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ δεν έχει ακρότατα. Σ ☐ Λ ☐

iv) Αν f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β), τότε δεν έχει ακρότατα. Σ ☐ Λ ☐

ΘΕΜΑ 2ο: α) Για κάθε α > 0, να δείξετε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$ με $x > 0$.

ΤΕΣΤ 2ο

ΘΕΜΑ 1ο: Α. Πότε μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο πεδίο ορισμού της;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o, τότε και η συνάρτηση $g(x) = f(x) + 4$ παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o. Σ ☐ Λ ☐

ii) Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα στο σύνολο Α, τότε είναι σταθερή στο Α. Σ ☐ Λ ☐

iii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, τότε η -f είναι γνησίως φθίνουσα στο Α. Σ ☐ Λ ☐

iv) Αν η συνάρτηση f έχει μέγιστο το 0, τότε η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x) \cdot f(x)$ έχει ελάχιστο το 0. Σ ☐ Λ ☐

ΘΕΜΑ 2ο: Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^4 + \sqrt{x^3 - 8}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε το είδος της μονοτονία της f.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y.