

2.2 Κατακόρυφη - Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

ΘΕΩΡΙΑ

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $f(x) = g(x) + c$, ($c > 0$), προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά c μονάδες προς τα **πάνω**.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $f(x) = g(x) - c$, ($c > 0$), προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά c μονάδες προς τα **κάτω**.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $f(x) = g(x - c)$, ($c > 0$), προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά c μονάδες προς τα **δεξιά**.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με $f(x) = g(x + c)$, ($c > 0$), προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά c μονάδες προς τα **αριστερά**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

- Οι συναρτήσεις που προκύπτουν με οριζόντια ή κατακόρυφη μετατόπιση, διατηρούν το ίδιο είδος μονοτονίας με την αρχική.
- Αν μια συνάρτηση είναι άρτια και μετατοπιστεί κατακόρυφα, τότε η νέα συνάρτηση παραμένει άρτια.
- Για την κατασκευή της καμπύλης μιας συνάρτησης, η οποία έχει προκύψει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f οριζόντια και κατακόρυφα, μετατοπίζουμε την καμπύλη της f οριζόντια και κατόπιν κατακόρυφα ή αντίστροφα.
- Αν η γραφική παράσταση της f έχει προκύψει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g με οριζόντια μετατόπιση, τότε οι γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων τέμνουν τον άξονα x στο ίδιο πλήθος σημείων.
- Οι συναρτήσεις που προκύπτουν με οριζόντια ή κατακόρυφη μετατόπιση, διατηρούν το ίδιο είδος ακρότατων με την αρχική.
- Αν οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f , g τέμνονται σε κάποια σημεία και έχουμε ίδια μετατόπιση και στις δύο συναρτήσεις, τότε και οι νέες γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο ίδιο πλήθος σημείων.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:**

i) Να βρείτε τη συνάρτηση από τις παρακάτω συναρτήσεις της οποίας η γραφική παράσταση έχει προκύψει μόνο με οριζόντια μετατόπιση της καμπύλης της $f(x) = x^2$.

α) $g(x) = x^2 - 1$ β) $h(x) = (x + 2)^2$ γ) $\varphi(x) = (x - 1)^2 + 4$ δ) $\kappa(x) = -(x + 4)^2$

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση από τις παρακάτω συναρτήσεις της οποίας η γραφική παράσταση έχει προκύψει μόνο με κατακόρυφη μετατόπιση της καμπύλης της $f(x) = x^2$.

α) $g(x) = x^2 + 1$ β) $h(x) = (x + 6)^2$ γ) $\varphi(x) = (x - 3)^2 + 4$ δ) $\kappa(x) = (x - 4)^2 - 5$.

iii) Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ έχει την κορυφή της στον άξονα x' με μια συνάρτηση από τις παρακάτω:

α) $g(x) = x^2 + 5$ β) $h(x) = (x - 4)^2$ γ) $\varphi(x) = (x - 2)^2 + 5$ δ) $\kappa(x) = (x + 3)^2 - 6$

iv) Η συνάρτηση $\varphi(x) = x^4$ έχει τον ίδιο άξονα συμμετρίας με μια από τις παρακάτω:

α) $f(x) = x^4 + 5$ β) $\kappa(x) = (x - 2)^4 + 3$ γ) $g(x) = (x + 4)^4 + 6$ δ) $h(x) = -(x - 6)^4 + 1$

v) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση έχει προκύψει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ με κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδων πάνω και 3 μονάδων οριζόντια μετατόπιση δεξιά.

α) $g(x) = x^3 + 2$ β) $\varphi(x) = (x - 3)^3 + 2$ γ) $\kappa(x) = (x + 3)^3 - 2$ δ) $h(x) = (x - 2)^3 - 3$

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^2 + 1$ έχει Σ Λ
προκύψει από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2$ με οριζόντια μετατόπιση.

ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^2 + 1$ έχει Σ Λ
προκύψει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 4$ με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 5 μονάδες πάνω.

iii) Η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)^2$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία ε Σ Λ
με εξίσωση $\varepsilon: x = 2$.

- iv) Οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = |x|$ και $g(x) = |x - 2|$ έχουν ίδιο $\Sigma \square \Lambda \square$ είδος ακρότατου.
- v) Αν μια συνάρτηση g έχει γραφική παράσταση που έχει προκύψει από $\Sigma \square \Lambda \square$ τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση, τότε οι δύο συναρτήσεις f, g έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

3. Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^2$

β) $g(x) = (x - 1)^2$

γ) $h(x) = (x - 1)^2 + 2$

4. Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = |x|$

β) $g(x) = |x + 1|$

γ) $h(x) = |x - 3|$

5. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x' στα σημεία με τετμημένες $x = 2, x = -4$, να βρείτε σε ποια σημεία τέμνει τον άξονα x' η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x - 5)$.

6. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y = 2$, να βρείτε σε ποιο σημείο τέμνει τον άξονα $y'y$ η συνάρτηση g με τύπο: $g(x) = f(x) - 6$.

7. Να βρείτε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = f(x + 2) + 4$.

8. Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $A = \mathbb{R} - \{1, 2\}$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = f(x - 3) + 5$.

9. Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^2$

β) $g(x) = x^2 + 4x + 6$

γ) $h(x) = x^2 - 6x + 8$

10. Να βρείτε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = f(x - 1)$.

11. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f , από την οποία προέκυψε με διαδοχικές μετατοπίσεις στη γραφική της παράσταση η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$.

- 12.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$ και οι συναρτήσεις $g(x) = f(x - 2)$ και $h(x) = f(x) - 4$.
Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων g, h .
- 13.** Αν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $A = \mathbb{R} - \{4, 6\}$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , αν ισχύει: $g(x) = f(x + 2) + 5$.
- 14.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^4$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g , της οποίας η γραφική παράσταση έχει προκύψει από τη γραφική παράσταση της f κατά 5 μονάδες οριζόντια δεξιά και 4 μονάδες κατακόρυφα κάτω.
- 15.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 3x^2 + 5$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g , της οποίας η γραφική παράσταση έχει προκύψει από τη γραφική παράσταση της f κατά 5 μονάδες οριζόντια αριστερά και 4 μονάδες κατακόρυφα πάνω.
- 16.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g , της οποίας η γραφική παράσταση έχει προκύψει με κατακόρυφη μετατόπιση από τη γραφική παράσταση της f με τύπο $f(x) = x^2$ και έχει κορυφή το σημείο $K(0, -4)$.
- 17.** Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x - 4)^2 + 3$. Να γίνει η γραφική της παράσταση και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g , της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $y'g$.
- 18.** α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων $f(x) = |x + 1|$ και $g(x) = |x - 2|$.
β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων f, g , καθώς και τα σημεία στα οποία έχουμε ελάχιστο για την κάθε συνάρτηση.
γ) Τι παρατηρείτε για τα σημεία στα οποία έχουμε ελάχιστο και στις δύο συναρτήσεις;
- 19.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 6x + 14$ με $x > 3$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με οριζόντια μετατόπιση 4 μονάδων αριστερά, να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης g .
- 20.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = x^2 + 4x + 6$ και $g(x) = -x^2 - 4x - 4$. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = f(x - 2) + 2$ και $k(x) = g(x - 2) + 2$ έχουν κοινά σημεία.

ΤΕΣΤ 1°

ΘΕΜΑ 1°: Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- i) Αν μετατοπίσουμε την $f(x) = (x - 2)^4$ κατά 2 μονάδες αριστερά, προκύπτει άρτια συνάρτηση. Σ Λ
- ii) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x}$ προέκυψε με κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{4}{x} - 2$. Σ Λ
- iii) Οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = (x - 3)^3$ έχουν ίδιο είδος μονοτονίας. Σ Λ
- iv) Οι συναρτήσεις $f(x) = x^4$ και $g(x) = x^4 - 5$ έχουν ίδιο είδος ακρότατου. Σ Λ

ΘΕΜΑ 2°: Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{4}{x-5}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g , της οποίας η γραφική παράσταση έχει προκύψει από τη γραφική παράσταση της f , με μετατόπιση αριστερά κατά 2 μονάδες και πάνω κατά 8 μονάδες.

ΤΕΣΤ 2°

ΘΕΜΑ 1° : Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- i) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x + 4)$, $f(x + 2)$ έχουν προκύψει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια μετατόπιση. Σ Λ
- ii) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) + 4$, $f(x) + 2$ έχουν προκύψει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια μετατόπιση. Σ Λ
- iii) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) - 4$, $f(x) + 8$ έχουν προκύψει από τη γραφική παράσταση της f με κατακόρυφη μετατόπιση. Σ Λ
- iv) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ έχει προκύψει από τη γραφική παράσταση της $g(x) = (x^2 - 1)^2 + 4$ με κατακόρυφη μετατόπιση. Σ Λ

ΘΕΜΑ 2°: Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f από της οποίας τη γραφική παράσταση προέκυψε η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = x^2 - 4x + 7$ με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

- 1.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + (\lambda - 2)x^2 + 3x$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 - Να βρείτε την τιμή του λ αν η συνάρτηση f είναι περιττή.
 - Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει λύσεις.
- 2.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq 1 \\ 2x + \lambda, & x > 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
 - Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1], (1, +\infty)$.
 - Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε $6f(0) < f(2)$. Τι παρατηρούμε για αυτές τις τιμές του λ ως προς τη μονοτονία της συνάρτησης f στο πεδίο ορισμού της;
- 3.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + (\kappa - 2)x + 4, \kappa \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε την τιμή του κ , αν η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x = 4$
 - Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.
 - Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης στο διάστημα $(4, +\infty)$.
- 4.** Δίνεται συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} . Αν τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(1,5)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης:
- Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης f .
 - Να δείξετε ότι $f(x^2 + x) > 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 5.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -x^5 + 1$.
- Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης.
 - Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(-1) + x) > f(x^2 + 2x)$.
- 6.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{8}{x}, x > 0$.
- Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης.
 - Να λύσετε την ανίσωση: $f(2f(x) - 4) > 4$.
- 7.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1}$.
- Να δείξετε ότι έχει ελάχιστη τιμή τον αριθμό $\frac{1}{2}$.
 - Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο οποίο παρουσιάζει ελάχιστο.
 - Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε η ευθεία $\varepsilon: y = 2\kappa^2 + \frac{3}{2}\kappa$ να τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1^ο: Α. Πότε μια συνάρτηση είναι άρτια και πότε περιττή στο πεδίο ορισμού της;
 Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε και η $|f|$ είναι γνησίως αύξουσα. Σ Λ
- ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} . Σ Λ
- iii) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^{2v+1}$ είναι περιττή με $v \in \mathbb{Z}$. Σ Λ
- iv) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση τέμνει το πολύ δύο φορές τον άξονα x' . Σ Λ
- v) Κάθε περιττή συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Σ Λ

ΘΕΜΑ 2^ο: Δίνεται η περιττή συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x^3 + 3x + \kappa$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να προσδιορίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$.
 β) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f .
 γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 76$.

ΘΕΜΑ 3^ο: Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 2 \\ -x + 10, & x < 2 \end{cases}$

- α) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f στα διαστήματα $(-\infty, 2)$ και $[2, +\infty)$.
 β) Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης f .
 γ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει λύση.

ΘΕΜΑ 4^ο: Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = (2 - 3x)^3 - (2 + 5x)^3$.

- α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της συνάρτησης f .
 β) Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
 γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι περιττή.
 δ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .