

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

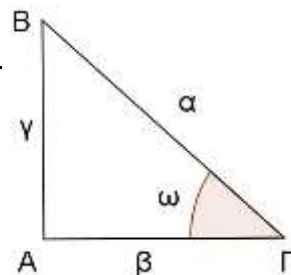
3.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

ΘΕΩΡΙΑ

● **Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $A = 90^\circ$, κάθετες πλευρές β, γ και οξεία γωνία $\hat{\omega}$.

$$\begin{aligned} \text{Ορίζουμε, } \eta\mu\omega &= \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} & \text{συν}\omega &= \frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \\ \epsilon\phi\omega &= \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκειμένη κάθετη}} & \sigma\phi\omega &= \frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}} \end{aligned}$$

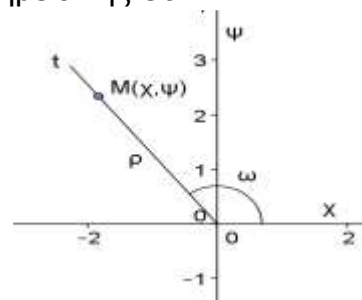


● **Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $\omega, 0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$**

Στο σύστημα xOy, θεωρούμε τη γωνία $x\hat{O}t = \hat{\omega}$ και M(x,y) σημείο της Ot.

Τότε:

$$\begin{aligned} \eta\mu\omega &= \frac{y}{\rho}, & \text{συν}\omega &= \frac{x}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \epsilon\phi\omega &= \frac{y}{x}, \text{ με } x \neq 0, & \sigma\phi\omega &= \frac{x}{y}, \text{ με } y \neq 0 \end{aligned}$$



● **Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των 360^ο και αρνητικών γωνιών**

- $\eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$
- $\sigma\text{υν}(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\text{υν}\omega$
- $\epsilon\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$
- $\sigma\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega, \quad k \in \mathbb{Z}$

● **Τιμές ημίτονου, συνημίτονου**

Για οποιαδήποτε γωνία ω, ισχύουν:

$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1 \quad \text{ή} \quad |\eta\mu\omega| \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \sigma\text{υν}\omega \leq 1 \quad \text{ή} \quad |\sigma\text{υν}\omega| \leq 1$$

● **Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών**

	1 ^ο	2 ^ο	3 ^ο	4 ^ο
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-

● Ακτίσιο (1 rad)

Σε κύκλο (O,ρ) ένα τόξο έχει μέτρο ένα ακτίσιο, αν το μήκος του ισούται με μια ακτίνα ρ. Ένα rad είναι η γωνία η οποία, αν γίνει επίκεντρη σ' έναν κύκλο, βαίνει σ' ένα τόξο μήκους μιας ακτίνας. Το μήκος ενός τόξου α ακτίνων είναι: $S = \alpha \cdot \rho$

● Μονάδες Μέτρησης Γωνιών

Οι γωνίες και τα τόξα ενός κύκλου μετρούνται σε μοίρες (°) ή ακτίνια (rad).

Αν μια γωνία ισούται με α rad και μ°, τότε ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180^\circ}$$

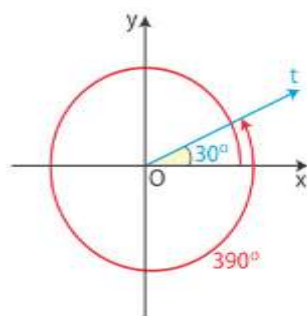
● Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γνωστών Γωνιών

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί Αριθμοί			
Μοίρες	rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0° (360°)	0 (2π)	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0
180°	π	0	-1	0	Δεν ορίζεται
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	Δεν ορίζεται	0

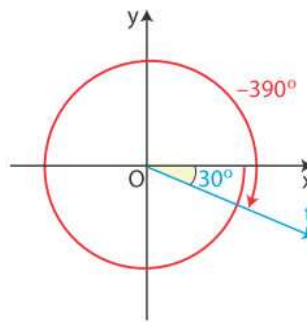
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

- Για την εύρεση του πρόσημου των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας, κάνουμε χρήση του μνημονικού κανόνα «**ΟΗΕΣ**», που σημαίνει ότι στο 1^ο τεταρτημόριο όλοι οι αριθμοί είναι θετικοί, στο 2^ο μόνο το ημίτονο, στο 3^ο μόνο η εφαπτομένη - άρα και η συνεφαπτομένη - και στο τέταρτο μόνο το συνημίτονο.

- Αν ο ημιάξονας Ox κινηθεί κατά τη θετική φορά (αντίθετη των δεικτών του ρολογιού), τότε διαγράφει θετική γωνία (Σχ.1). Αν κινηθεί με αρνητική φορά (ίδιας φοράς των δεικτών του ρολογιού), διαγράφει αρνητική γωνία (Σχ.2).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

- Αν το σημείο $M(x,y)$ βρίσκεται πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο $(O,1)$ και η γωνία $\widehat{xOM} = \widehat{\omega}$, τότε ισχύει: $\text{συν}\omega = x$ (τετμημένη M) και $\text{ημ}\omega = y$ (τεταγμένη M).
- Η εφαπτομένη μιας γωνίας δεν ορίζεται όταν το σημείο M βρίσκεται στον άξονα $y'y$.
- Η συνεφαπτομένη μιας γωνίας δεν ορίζεται όταν το σημείο M βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$.
- Η εφαπτομένη μιας γωνίας $\omega \neq \kappa \cdot 180^\circ + 90^\circ$ ($\kappa \in \mathbb{Z}$) παίρνει τιμές σ' όλο το \mathbb{R} .
- Η συνεφαπτομένη μιας γωνίας $\omega \neq \kappa \cdot 180^\circ$ ($\kappa \in \mathbb{Z}$) παίρνει τιμές σ' όλο το \mathbb{R} .
- Αν η γωνία ω έχει μορφή $\omega = 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε ισχύει: $\text{συν}\omega = 1$ και $\text{ημ}\omega = 0$.
- Αν η γωνία ω έχει μορφή $\omega = 2\kappa\pi + \pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε ισχύει: $\text{συν}\omega = -1$ και $\text{ημ}\omega = 0$.
- Αν η γωνία ω έχει μορφή $\omega = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε ισχύει: $\text{συν}\omega = 0$ και $\text{ημ}\omega = 1$.
- Αν η γωνία ω έχει μορφή $\omega = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, τότε ισχύει: $\text{συν}\omega = 0$ και $\text{ημ}\omega = -1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Αν για τη γωνία ω έχουμε $\omega \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, τότε ισχύει:

- α) $\text{ημ}\omega \cdot \text{συν}\omega > 0$ β) $\text{ημ}\omega + \text{συν}\omega > 0$ γ) $\text{εφ}\omega \cdot \text{σφ}\omega < 0$ δ) $\text{εφ}\omega \cdot \text{συν}\omega > 0$

ii) Η τιμή του $\eta\mu 750^\circ$ είναι:

α) $-\frac{1}{2}$ β) $\frac{1}{2}$ γ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ δ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

iii) Η τιμή του $\sigma\upsilon\nu(-390^\circ)$ είναι:

α) $\frac{1}{2}$ β) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ γ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ δ) 1

iv) Η τιμή της παράστασης $A = 2\eta\mu 45^\circ + 2\sigma\upsilon\nu 45^\circ$ είναι:

α) 1 β) $2\sqrt{2}$ γ) 2 δ) $4\sqrt{2}$

v) Αν η γωνιά ω ισούται με $\frac{\pi}{10}$ rad, τότε η γωνιά ω σε μοίρες έχει τιμή:

α) 30° β) 36° γ) 18° δ) 45°

vi) Η μέγιστη τιμή της παράστασης $A = 2\eta\mu x - 5\sigma\upsilon\nu x$ είναι:

α) -3 β) -7 γ) 7 δ) 3

vii) Η γωνιά $\omega = 450^\circ$ έχει τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία:

α) $\frac{\pi}{3}$ β) $\frac{3\pi}{4}$ γ) $\frac{\pi}{2}$ δ) $\frac{3\pi}{2}$

viii) Η τελική πλευρά της γωνίας $\omega = -\frac{15\pi}{4}$ βρίσκεται:

α) στο 1^ο τεταρτημόριο β) στο 2^ο τεταρτημόριο
 γ) στο 4^ο τεταρτημόριο δ) στον άξονα γ'γ

ix) Αν $M(x,y)$ είναι σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου και $x\widehat{OM} = \theta$, τότε το ζεύγος (x,y) αντιστοιχεί στο ζεύγος:

α) (σφθ,ημθ) β) (συνθ,ημθ) γ) (ημθ,συνθ) δ) (εφθ,συνθ)

x) Αν για τη γωνία ω ισχύει $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega > 0$, τότε η τελική πλευρά της ω βρίσκεται:

α) στο 1^ο ή στο 2^ο τεταρτημόριο β) στο 1^ο ή στο 3^ο τεταρτημόριο
 γ) στο 3^ο ή στο 4^ο τεταρτημόριο δ) στο 4^ο ή στο 1^ο τεταρτημόριο

xi) Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} > 90^\circ$), τότε ισχύει:

α) $\sigma\phi A < \sigma\upsilon\nu B + \eta\mu\Gamma$ β) $\eta\mu A < \sigma\upsilon\nu A$ γ) $\sigma\phi A \cdot \epsilon\phi A < 0$ δ) $\sigma\upsilon\nu A > \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma$

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα πρόσημων των αριθμών ημω, συνω, εφω, σφω.

Γωνία ω	Πρόσημο			
	ημω	συνω	εφω	σφω
126°				
210°				
305°				
89°				
-455°				

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- i) Για κάθε γωνία ω ισχύει: $|\eta\mu\omega| < 1$. Σ Λ
- ii) Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ και $\eta\mu\omega = -1$, τότε $\omega = 2κ\pi + \pi$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$. Σ Λ
- iii) Ισχύει: $\sigma\upsilon\nu 3 < 0$ Σ Λ
- iv) Ισχύει: $\epsilon\phi 4 > 0$ Σ Λ
- v) Ισχύει: $\sigma\phi \frac{21\pi}{4} > 0$ Σ Λ
- vi) Ισχύει: $\eta\mu 1580^\circ < 0$ Σ Λ
- vii) Αν $\eta\mu\theta > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\theta < 0$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας θ βρίσκεται στο 2° τεταρτημόριο. Σ Λ
- viii) Για κάθε γωνία ω ορίζεται η τιμή της εφω. Σ Λ
- ix) Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu\omega = x^2 + 2x + 3$ είναι αδύνατη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$. Σ Λ
- x) Η τιμή της παράστασης $A = 2\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ$ είναι $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Σ Λ
- xi) Η γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$ rad ισούται με 145° . Σ Λ
- xii) Η ελάχιστη τιμή της παράστασης: $A = 3\sigma\upsilon\nu^2\omega - 5$ είναι ίση με -8 . Σ Λ
- xiii) Η τελική πλευρά της γωνίας $\omega = -3050^\circ$ βρίσκεται στο 3° τεταρτημόριο. Σ Λ
- xiv) Η γωνία $\omega = 330^\circ$ ισούται με $\frac{13\pi}{6}$ rad Σ Λ
- xv) Η γωνία $-\frac{19\pi}{4}$ rad έχει τελική πλευρά στο 4° τεταρτημόριο Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ**A ομάδα**

- 4.** Δίνεται τόξο μήκους $S = 10 \text{ cm}$ το οποίο βρίσκεται σε κύκλο ακτίνας $\rho = 2,5 \text{ cm}$.
Να βρείτε σε rad το μέτρο της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο παραπάνω τόξο.
- 5.** Να βρείτε το μήκος τόξου 45° το οποίο βρίσκεται σε κύκλο με ακτίνα 8 cm .
- 6.** Να μετατρέψετε σε μοίρες τις γωνίες:
- α) $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ β) $\frac{7\pi}{4} \text{ rad}$ γ) $\frac{\pi}{20} \text{ rad}$ δ) $\frac{25\pi}{4} \text{ rad}$
- 7.** Να μετατρέψετε σε ακτίνια τις γωνίες:
- α) 330° β) 240° γ) 450° δ) -225°
- 8.** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:
- α) $\frac{9\pi}{4} \text{ rad}$ β) $\frac{19\pi}{3} \text{ rad}$ γ) $-\frac{47\pi}{6} \text{ rad}$ δ) $\frac{25\pi}{4} \text{ rad}$
- 9.** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:
- α) 780° β) 1830° γ) -675° δ) 405°
- 10.** Το άθροισμα δύο γωνιών είναι $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ και η διάφορα 60° . Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η κάθε γωνία.
- 11.** Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι δύο παραπληρωματικές γωνίες, που διαφέρουν $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$.
- 12.** Αν $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$, να δείξετε ότι: $\sin^2\omega \cdot \eta\mu\omega + 4\sin\omega \cdot \eta\mu\omega + 4\eta\mu\omega - \epsilon\phi\omega < 0$.
- 13.** Σε ποια τεταρτημόρια βρίσκεται η τελική πλευρά μιας γωνίας ω για την οποία ισχύει:
 $\sin\omega \cdot \sigma\phi\omega \cdot (\eta\mu\omega - 2) > 0$.
- 14.** Αν $3\pi < x < \frac{7\pi}{2}$, να δείξετε ότι: $\epsilon\phi x - \sigma\upsilon\nu x > \eta\mu x$.
- 15.** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων, καθώς και τις τιμές των x, ω που λαμβάνουν αυτές, αν x, ω ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi)$.
- α) $A = -4\sigma\upsilon\nu x + 6\eta\mu\omega + 8$ β) $B = \sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 4$ γ) $\Gamma = \frac{5}{3\sigma\upsilon\nu\omega - 6}$

- 16.** Να εξετάσετε αν υπάρχει πραγματικός αριθμός x : $\eta\mu x = \sqrt{6} - \sqrt{5}$.
- 17.** Να δείξετε ότι δεν υπάρχει αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $\eta\mu^2 x + 6 = 5\eta\mu x$.
- 18.** Να δείξετε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $4\eta\mu x - 5\kappa > 0$, $\kappa \in \mathbb{Z}^*$.
- 19.** Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), έχουμε $\widehat{B} = 30^\circ$ και $(B\Gamma) = 12\text{cm}$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ και το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.
- 20.** Να βρείτε τα σημεία τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω και του τριγωνομετρικού κύκλου, για την όποια ισχύει: $\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$.
- 21.** Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 45^\circ \epsilon\phi 45^\circ \eta\mu 90^\circ}{\epsilon\phi 60^\circ \sigma\upsilon\nu 30^\circ \eta\mu 60^\circ \sigma\phi 45^\circ}$.
- 22.** Ένα αεροπλάνο βρίσκεται σε ύψος 600m πάνω από το έδαφος και ακολουθεί πορεία προσγείωσης που σχηματίζει γωνία 30° με την οριζόντια ευθεία. Πόσα μέτρα θα διανύσει μέχρι να προσεγγίσει το διάδρομο προσγείωσης;
- 23.** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με εμβαδόν E , να δείξετε ότι:

$$\epsilon\phi B + \sigma\phi B = \frac{\alpha^2}{2E}$$
- 24.** Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu 30^\circ + \epsilon\phi 120^\circ + \sigma\upsilon\nu 135^\circ - \epsilon\phi 3720^\circ - \sigma\upsilon\nu 1935^\circ - \eta\mu 390^\circ = 0$.

B ομάδα

- 25.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με ύψος $(A\Delta) = 6\text{ cm}$. Αν ισχύει $\sigma\phi B + \sigma\phi \Gamma = 4$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- 26.** Αν για τη γωνία x ισχύει $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A = 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} + \epsilon\phi 2x + \sigma\upsilon\nu 3x$$
.
- 27.** Από την κορυφή K μιας πολυκατοικίας ύψους 30m κάποιος βλέπει τις άκρες ενός δρόμου A, B . Αν οι γωνίες από το σημείο παρατήρησης K με το οριζόντιο επίπεδο του δρόμου $\widehat{KA\Gamma} = 30^\circ$ και $\widehat{KB\Gamma} = 45^\circ$ (Γ το σημείο βάσης της πολυκατοικίας), να βρείτε το πλάτος του δρόμου.

28. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ σημείο της πλευράς $B\Gamma$, ώστε $B\Gamma = 4B\Delta$. Αν $AB = A\Delta$, να δείξετε ότι: $\epsilon\phi B = 7\epsilon\phi\Gamma$.

29. Για κάθε πραγματικό x , να δείξετε ότι ισχύει: $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - 1 \leq \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

30. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού λ με $\lambda > -3$, για τον οποίο ισχύει: $\sigma\upsilon\nu x = \frac{3\lambda+2}{\lambda+3}$.

31. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| + |3\eta\mu x| - |4\sigma\upsilon\nu x|$, αν $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

32. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $A\Delta$ το ύψος του. Να δείξετε ότι:

$$\text{α) } \gamma\eta\mu B + \beta\eta\mu\Gamma = 2A\Delta \qquad \text{β) } \alpha = \frac{A\Delta}{\epsilon\phi\Gamma} + \frac{A\Delta}{\epsilon\phi B}$$

33. Να αποδείξετε ότι οι τελικές πλευρές των γωνιών της μορφής $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο σε τέσσερα σημεία που σχηματίζουν τετράγωνο.

34. Να βρείτε πόσων ακτινίων είναι η γωνία που έχει τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία $\omega = \frac{\pi}{6}$ και βρίσκεται μεταξύ των γωνιών $\frac{15\pi}{6}$ και $\frac{21\pi}{4}$.

35. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, για το οποίο ισχύει $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Αν το εμβαδόν του είναι $E = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$, να βρείτε τις διαστάσεις του.

36. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Αν κάθε μια από τις ίσες πλευρές έχει μήκος διπλάσιο από τη βάση $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

$$\text{α) } \epsilon\phi B = \sqrt{15} \qquad \text{β) } 4\eta\mu \frac{A}{2} = 1 \qquad \text{γ) } \eta\mu \frac{A}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{15}}{16}$$

37. Δύο πλοία αναχωρούν ταυτόχρονα από το λιμάνι $O(0,0)$. Το πρώτο πλοίο κινείται βορειοανατολικά με ταχύτητα 30 μίλια την ώρα και σχηματίζει γωνία 30° με τον ημιάξονα Ox . Το δεύτερο πλοίο κινείται νοτιοανατολικά με ταχύτητα 40 μίλια την ώρα και σχηματίζει γωνία 30° με τον ημιάξονα Ox . Αν η ορατότητα τη συγκεκριμένη ημέρα είναι τα 35 μίλια, να εξετάσετε αν μετά από μία ώρα ταξιδιού, οι επιβαίνοντες στο πρώτο πλοίο έχουν τη δυνατότητα να διακρίνουν το δεύτερο πλοίο.

ΤΕΣΤ 1^ο**ΘΕΜΑ 1^ο:** Α. Τι λέγεται ακτίνιο;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Για κάθε γωνία x ισχύει: $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x \geq 0$. Σ Λ

ii) Για κάθε γωνία x ισχύει: $\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi x > 0$ ($\sigma\upsilon\nu x \neq 0$, $\eta\mu x \neq 0$). Σ Λ

iii) Για τη γωνία -430° , ισχύει: $\eta\mu(-430^\circ) < 0$. Σ Λ

iv) Αν $\pi < x < 2\pi$, τότε $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x < 0$. Σ Λ

v) Σε κάθε αμβλυγώνιο ΑΒΓ ισχύει: $\sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma < 0$. Σ Λ

ΘΕΜΑ 2^ο: Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = -\frac{37\pi}{6}$.**ΤΕΣΤ 2^ο****ΘΕΜΑ 1^ο:** Α. Πώς ορίζεται το ημίτονο και το συνημίτονο μιας γωνίας στον τριγωνομετρικό κύκλο;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Αν $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, τότε $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x > 0$. Σ Λ

ii) Ισχύει: $\eta\mu \frac{17\pi}{4} = \eta\mu 45^\circ$ Σ Λ

iii) Ο άξονας των εφαπτομένων είναι παράλληλος στον x' . Σ Λ

iv) Ισχύει: $\eta\mu 1000^\circ > 0$ Σ Λ

v) Ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$: $|2\eta\mu x - 5\sigma\upsilon\nu y| \leq 7$ Σ Λ

ΘΕΜΑ 2^ο: Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$). Να δείξετε ότι:

α) $\sigma\phi B \cdot \epsilon\phi \Gamma = \frac{1}{\eta\mu^2 B} - 1$

β) $\sigma\phi^2 B + \epsilon\phi^2 B = \frac{\epsilon\phi^4 B + 1}{\epsilon\phi^2 B}$