3.2 Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

ΘΕΩΡΙΑ

● Τριγωνομετρική ταυτότητα

Κάθε ισότητα που περιέχει τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας ή γωνιών και ισχύει για κάθε τιμή που ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών, λέγεται τριγωνομετρική ταυτότητα.

● Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

- $ημ^2 ω + συν^2 ω = 1$ (1)
- $εφω = \frac{ημω}{συνω}$, $συνω \neq 0$ (2)
- $σφω = \frac{συνω}{ημω}$, $ημω \neq 0$ (3)
- $εφω \cdot σφω = 1$ (4) $(συνω \cdot ημω \neq 0)$
- $συν^2ω = \frac{1}{1 + εφ^2ω}$ (5)
- $ημ^2ω = \frac{εφ^2 ω}{1 + εφ^2ω}$ (6)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

● Το σύμβολο $ημ^νx$ σημαίνει $(ημx)^ν$

● Για την απόδειξη μιας τριγωνομετρικής ταυτότητας, ακολουθούμε έναν από τους ακόλουθους τρόπους:

i) Αρχίζουμε από το μέλος που έχει πράξεις και καταλήγουμε στο άλλο μέλος.

ii) Με ισοδυναμίες καταλήγουμε σε σχέση που ισχύει (είτε από δεδομένα είτε προφανής είτε από βασικές γνώσεις).

iii) Αρχίζουμε χωριστά το κάθε μέλος και καταλήγουμε στην ίδια παράσταση.

● Για την εύρεση τριγωνομετρικών αριθμών χρησιμοποιούμε τη σχέση (1) αν δίνεται το ημω ή συνω. Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (4), (5), (6) αν δίνεται η τιμή της εφω ή σφω.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Αν $π < ω < \frac{3π}{2}$ και $συνω = -\frac{4}{5}$, τότε η τιμή του ημω είναι:

α) $-\frac{1}{2}$ β) $-\frac{3}{5}$ γ) $\frac{3}{5}$ δ) $-\frac{1}{5}$

ii) Αν $\frac{π}{2} < ω < π$ και εφω = - 5, τότε η τιμή της σφω είναι:

α) 5 β) $\frac{1}{5}$ γ) $-\frac{1}{5}$ δ) - 5

iii) Αν η τιμή του ημω·συνω είναι $-\frac{1}{4}$, τότε η τιμή της παράστασης $(ημω - συνω)^2$ είναι:

α) $\frac{3}{2}$ β) $\frac{3}{4}$ γ) 1 δ) $\frac{5}{4}$

iv) Αν εφω = $-2\sqrt{2}$ και $\frac{3π}{2} < ω < 2π$, τότε η τιμή του συνω είναι:

α) $\frac{1}{9}$ β) $-\frac{1}{3}$ γ) $\frac{1}{3}$ δ) $\frac{1}{8}$

v) Αν σφω = $\frac{1}{2}$ και $0 < ω < \frac{π}{2}$, τότε η τιμή του ημω είναι:

α) $\frac{1}{5}$ β) $\frac{2}{5}$ γ) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ δ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

vi) Αν για το σημείο Μ (x,y) του επίπεδου ισχύει x = 4συνω, y = 4ημω, τότε το σημείο Μ βρίσκεται πάνω σε:

α) κύκλο β) παραβολή γ) υπερβολή δ) ευθεία

vii) Αν για το σημείο Μ (x,y) του επίπεδου ισχύει x = 5συνω, y= 5ημω, τότε το σημείο Μ βρίσκεται στη γραμμή με εξίσωση:

α) xy = 25 β) $x^2 + y^2 = 5$ γ) $y^2 = 5x$ δ) $x^2 + y^2 = 25$

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

i) Υπάρχει γωνία ω, για την οποία να ισχύει: ημω = $\frac{1}{3}$, συνω = $\frac{2}{3}$ Σ ☐ Λ ☐

ii) Υπάρχει γωνία ω, για την οποία: ημω + συνω = 2. Σ ☐ Λ ☐

iii) Αν $κ \in \mathbb{R}$ (κ≠1), τότε υπάρχει γωνία ω ώστε: εφω = $\frac{1}{κ-1}$ και σφω = κ-1. Σ ☐ Λ ☐

iv) Υπάρχει γωνία ω με $0 \le ω < 2π$, ώστε: ημω = -1 και συνω = 1. Σ ☐ Λ ☐

v) Υπάρχει γωνία ω με $0 \le ω < 2π$, ώστε: ημω = $-\frac{3}{5}$ και συνω = $-\frac{4}{5}$. Σ ☐ Λ ☐

vi) Ισχύει: συν1 = $\sqrt{1 - ημ^2 1}$ Σ ☐ Λ ☐

vii) Ισχύει: ημ2·σφ2 = συν2 Σ ☐ Λ ☐

viii) Η τιμή της παράστασης: $\frac{1-ημ^2x}{1-ημx}$ ισούται με 1 + ημx για κάθε x ∈ ℝ. Σ ☐ Λ ☐

ix) Για κάθε γωνία ω ισχύει: $\sqrt{(ημω-1)^2}$ = 1 - ημω. Σ ☐ Λ ☐

x) Αν x = συνω, y = ημω, τότε το σημείο Μ (x,y) ανήκει στο κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα 1. Σ ☐ Λ ☐

xi) Για κάθε γωνία x ισχύει: σφx·ημx = συνx. Σ ☐ Λ ☐

xii) Ισχύει: συν $\frac{5π}{6}$ = $\sqrt{1-ημ^2\frac{5π}{6}}$. Σ ☐ Λ ☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α ομάδα

3. Αν π < x < $\frac{3π}{2}$ και (3συνx+2)(2συνx - 1) = 0

α) Να δείξετε ότι: συνx = - $\frac{2}{3}$.

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

4. Αν σφx = - 2 και $\frac{π}{2}$ < x < π, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

5. Αν εφx = $\frac{1}{3}$ και π < x < $\frac{3π}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x.

6. Αν εφx = - 3, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α = $\frac{4ημx+5συνx}{6ημx-συνx}$

7. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ (x,y) του επίπεδου με x = 5συνω, y = 5ημω ανήκει σε κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας 5.

8. Να δείξετε ότι το σημείο Μ(x,y) του επιπέδου με x = 2 + 4συνω και y = 3 + 4ημω ανήκει σε κύκλο κέντρου Κ(2,3) και ακτίνας 4.

9. Αν ημx + συνx = $\frac{1}{4}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α = $\frac{5}{1+4ημxσυνx}$.

10. Αν $2συν^2x - συνx - 1 = 0$ και $\frac{π}{2} < x < π$, να βρείτε τις τιμές των ημx, εφx.

11. Δίνεται: $\frac{εφ^2x}{1+εφ^2x} + 2ημ^2x = 1$ και $π < x < \frac{3π}{2}$, να βρείτε την τιμή του ημx.

12. Δίνεται: $- 6συν^2x + 7ημx + 1 = 0$ και $\frac{π}{2} < x < π$, να βρείτε τις τιμές του ημx και συνx.

13. Αν $ημx + συνx = \sqrt{3}$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $ημx·συνx$ β) $εφx + σφx$ γ) $ημ^3x + συν^3x$

14. Αν $2ημx + 3συνx = 2$ και $0 \leq x < 2π$, να βρείτε την τιμή του ημx.

15. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $Α = ημ^4x + συν^4x + 2συν^2x·ημ^2x + 10$ είναι ανεξάρτητη του x.

16. Να αποδείξετε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(ημx + συνx)^2 < 3$.

17. Αν $εφx = - \sqrt{2}$ και $\frac{π}{2} < x < π$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $Α = \frac{3σφx + ημx}{5 - συνx}$

18. Να δείξετε ότι: $ημ^4x + 2συν^2x \geq 1$.

19. Να δείξετε ότι: $εφ^2x + σφ^2x = \frac{1}{ημ^2x\, συν^2x} - 2$.

20. Αν $0 < x < \frac{π}{2}$, να δείξετε ότι: $εφx + 4σφx \geq 4$.

21. Δίνεται: $4σφ^2x = 5σφx$ και $π < x < \frac{3π}{2}$, να βρείτε την τιμή της εφx.

22. Δίνεται: $9ημ^2x + 6συν^2x = 8$ και $0 < x < \frac{π}{2}$, να βρείτε την τιμή της εφx.

23. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού κ αν $εφω = \frac{κ}{κ^2+1}$ και $σφω = κ + 2$.

24. Αν $0 < x < \frac{π}{2}$, να δείξετε ότι: $ημx + συνx > 1$.

25. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + (συνθ)x + 1 = 0$, με $0 \leq θ < 2π$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

26. Να δείξετε ότι η παράσταση $Α = συν^2ω + 5συνω + 6$ είναι θετική για κάθε γωνία ω.

27. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (ημθ)x + συν^2θ - 1 = 0$, με $0 < θ < \frac{π}{2}$. Να δείξετε ότι έχει δύο πραγματικές λύσεις άνισες.

28. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{1}{ημx} + 2συνx = (1 + σφx)^2 ημx$

β) $(2ημx - συνx)^2 = 3ημ^2x - 4ημx \cdot συνx + 1$

γ) $\frac{σφx - 2}{σφx + 2} = \frac{1 - 2εφx}{1 + 2εφx}$

δ) $\frac{συνx}{1 + ημx} + \frac{1}{σφx} = \frac{1}{συνx}$

29. Να δείξετε ότι:

α) $εφ^2x - σφ^2x = \frac{1}{συν^2x} - \frac{1}{ημ^2x}$

β) $1 - εφ^2x + εφ^4x = συν^2x\,(1 + εφ^6x)$

Β ομάδα

30. Να δείξετε ότι:

$$\left(\frac{2 - εφα}{2 + σφα}\right)^2 = \left(\frac{2συνα - ημα}{2ημα + συνα}\right)^2 εφ^2α$$

31. Να δείξετε ότι:

$$\frac{σφx + 1}{ημx} + \frac{εφx + 1}{συνx} = \frac{1}{ημxσυνx}\left(\frac{1}{συνx} + \frac{1}{ημx}\right)$$

32. Να δείξετε ότι:

α) $ημ^4x + ημ^2x \cdot συν^2x - εφ^2x = - εφ^2x \cdot ημ^2x$

β) $\frac{1 + ημx\,συνx}{συν^3x - ημ^3x} = \frac{1}{συνx - ημx}$

γ) $1 + \frac{συν^2x}{ημx - 1} = - ημx$

33. Αν $ημ^5x + συν^5x = 1$, να δείξετε ότι: $ημx + συνx = 1$

34. Αν 2συνx - 3ημx = $\sqrt{11}$, να δείξετε ότι: |3συνx + 2ημx| = $\sqrt{2}$

35. Να δείξετε ότι η παράσταση Α = $(3ημx + 5συνx)^2 + (3συνx - 5ημx)^2$ είναι ανεξάρτητη του x.

36. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{1 - σφ^2x + σφ^4x}{1 - εφ^2x + εφ^4x} = σφ^4x$

β) $\dfrac{εφx + ημx}{εφx - ημx} = \dfrac{1 + συνx}{1 - συνx}$

37. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό κ, (κ > 2), αν ισχύει:

$ημx = \dfrac{\sqrt{κ+2}}{κ-2}$ και $συνx = \dfrac{\sqrt{κ-1}}{κ-2}$

38. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (2συνθ + 1)x + συνθ = 0$ με $0 < θ < 2π$. Να δείξετε ότι:

α) Η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, τότε: $\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} = 5συνθ + εφθ\cdot ημθ + 4$

γ) Αν για τις x_1, x_2 ισχύει $x_1 + x_2 = -2$, τότε να δείξετε ότι: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{2}$

39. Να δείξετε ότι:

α) $\dfrac{συνω}{1 - εφω} + \dfrac{ημω}{1 - σφω} = συνω + ημω$

β) $\dfrac{1 - ημ^4x - συν^4x}{2ημ^4x} + 1 = \dfrac{1}{ημ^2x}$

γ) $\dfrac{συνx}{1 - ημx} - \dfrac{συνx}{1 + ημx} = 2εφx$

δ) $\dfrac{1 - 4ημ^2x \cdot συν^2x}{(ημx + συνx)^2} + 2ημxσυνx = 1$

40. Να δείξετε ότι:

α) $2(ημ^6x + συν^6x) + 1 = 3(ημ^4x + συν^4x)$

β) $\dfrac{2συν^2x - 1}{1 - 2ημxσυνx} - \dfrac{συνx - ημx}{συνx + ημx} = \dfrac{4εφx}{1 - εφ^2x}$

γ) $\dfrac{1 + 2ημxσυνx}{ημ^2x - συν^2x} = \dfrac{εφx + 1}{εφx - 1}$

δ) $\dfrac{1 - σφ^5x}{1 - εφ^5x} = \left(\dfrac{1 - σφx}{1 - εφx}\right)^5$

41. Αν ημx - συνx = $\dfrac{1}{3}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = εφ^2x + σφ^2x$

ΤΕΣΤ 1ο

ΘΕΜΑ 1ο: Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει: $ημ^2ω + συν^2ω = 1$.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Αν π < ω < 2π, τότε $ημω = \sqrt{1 - συν^2ω}$. Σ ☐ Λ ☐

ii) Ισχύει για κάθε γωνία ω: $εφ^2ω \cdot σφ^2ω = 1$ Σ ☐ Λ ☐

iii) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α = 90^o$) ισχύει: Σ ☐ Λ ☐
εφΒ·εφΓ =1.

iv) Υπάρχει γωνία ω με $ημω = \frac{6}{10}$ και $συνω = -\frac{8}{10}$. Σ ☐ Λ ☐

ΘΕΜΑ 2ο: Αν $σφω = -3\sqrt{3}$ και $\frac{3π}{2} < ω < 2π$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

ΤΕΣΤ 2ο

ΘΕΜΑ 1ο: Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω με συνω ≠ 0 ισχύει:

$$συν^2ω = \frac{1}{1+εφ^2ω}$$

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

i) Ισχύει: $ημ^2ω - \frac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω} = 0$ Σ ☐ Λ ☐

ii) Ισχύει: $εφω \cdot σφω = ημ90^o$ ($ω \neq κπ$, $ω \neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$) Σ ☐ Λ ☐

iii) Υπάρχει γωνία ω, ώστε: ημω = 2κ, συνω = 1 - κ, (κ > 0). Σ ☐ Λ ☐

iv) Αν x = εφθ, y = σφθ, τότε το σημείο Μ (x,y) ανήκει σε υπερβολή. Σ ☐ Λ ☐

ΘΕΜΑ 2ο: Αν σφα·εφβ = 2, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{σφα + σφβ}{1 + σφα\ σφβ} = \frac{3συνα\ ημα}{1 + ημ^2α}.$$