

### 3.3 Αναγωγή στο 1<sup>ο</sup> Τεταρτημόριο

#### ΘΕΩΡΙΑ

##### ● Αντίθετες Γωνίες ( $\omega$ , $-\omega$ )

Οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$\text{συν}(-\omega) = \text{συν}\omega$	$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
$\epsilon\phi(-\omega) = -\epsilon\phi\omega$	$\sigma\phi(-\omega) = -\sigma\phi\omega$

##### ● Παραπληρωματικές Γωνίες ( $180^\circ - \omega$ , $\omega$ ), ( $\pi - \omega$ , $\omega$ )

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$\eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu\omega$	$\text{συν}(\pi - \omega) = -\text{συν}\omega$
$\epsilon\phi(\pi - \omega) = -\epsilon\phi\omega$	$\sigma\phi(\pi - \omega) = -\sigma\phi\omega$

##### ● Γωνίες που διαφέρουν κατά $180^\circ$ ή $\pi$ ( $180^\circ + \omega$ , $\omega$ ), ( $\pi + \omega$ , $\omega$ )

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά  $180^\circ$  ή  $\pi$  έχουν ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

$\eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$	$\text{συν}(\pi + \omega) = -\text{συν}\omega$
$\epsilon\phi(\pi + \omega) = \epsilon\phi\omega$	$\sigma\phi(\pi + \omega) = \sigma\phi\omega$

##### ● Συμπληρωματικές Γωνίες ( $90^\circ - \omega$ , $\omega$ ), ( $\frac{\pi}{2} - \omega$ , $\omega$ )

Στις συμπληρωματικές γωνίες το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \text{συν}\omega$	$\text{συν}(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$
$\epsilon\phi(90^\circ - \omega) = \sigma\phi\omega$	$\sigma\phi(90^\circ - \omega) = \epsilon\phi\omega$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ**

- Αν για μια γωνία  $\omega$  έχουμε  $90^\circ < \omega < 180^\circ$ , τότε για την εύρεση των  $\eta\omega$ ,  $\sigma\omega$ ,  $\epsilon\phi\omega$ ,  $\sigma\phi\omega$  αναζητούμε τη γωνία  $180^\circ - \omega$  που ανήκει στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο.
- Αν για μια γωνία  $\omega$  έχουμε  $180^\circ < \omega < 270^\circ$ , τότε για την εύρεση των  $\eta\omega$ ,  $\sigma\omega$ ,  $\epsilon\phi\omega$ ,  $\sigma\phi\omega$  αναζητούμε τη γωνία  $\theta$  για την οποία  $\omega = 180^\circ + \theta$ , με  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ .
- Αν για μια γωνία  $\omega$  έχουμε  $270^\circ < \omega < 360^\circ$ , τότε για τη εύρεση των  $\eta\omega$ ,  $\sigma\omega$ ,  $\epsilon\phi\omega$ ,  $\sigma\phi\omega$  αναζητούμε τη γωνία  $\theta$  για την οποία  $\omega = 360^\circ - \theta$  με  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ .
- Αν μια γωνία  $\omega$  έχει μορφή  $\omega = (2κπ + 1)π \pm \theta$ , τότε οι τιμές των  $\eta\omega$ ,  $\sigma\omega$ ,  $\epsilon\phi\omega$ ,  $\sigma\phi\omega$  είναι ίδιες με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της  $\pi \pm \theta$ , όπου  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ , ( $\kappa \in \mathbb{Z}$ ).
- Κάθε γωνία της μορφής  $\omega = \frac{απ}{μ}$  γράφεται  $\omega = (2κπ) + \frac{λπ}{μ}$  ή  $2κπ + π + \frac{λπ}{μ}$ , οπότε αναζητούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της  $\omega$  στη γωνία  $\frac{λπ}{μ}$  ή  $\pi + \frac{λπ}{μ}$  ( $α, κ, λ, μ \in \mathbb{Z}^*$ ).
- Σε γωνίες μορφής  $\omega = \frac{\pi}{2} \pm \theta$ ,  $\frac{3\pi}{2} \pm \theta$  έχουμε αλλαγή των τριγωνομετρικών αριθμών (το ημίτονο σε συνημίτονο, ή αντίστροφα, και η εφαπτομένη σε συνεφαπτομένη, ή αντίστροφα). Το πρόσημο εξαρτάται από το τεταρτημόριο που βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας  $\omega$ . π.χ.  $\eta\mu(270^\circ - \theta) = -\sigma\omega\theta$ ,  $\sigma\omega\mu(90^\circ + \theta) = -\eta\mu\theta$ , ( $\theta$  οξεία γωνία).
- Σε γωνίες μορφής  $\omega = \pi \pm \theta$  ή  $2\pi \pm \theta$  οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μένουν οι ίδιοι, δηλαδή το ημίτονο παραμένει ημίτονο κ.λ.π. Το πρόσημο εξαρτάται από το τεταρτημόριο που βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας  $\omega$ , π.χ.  $\eta\mu(210^\circ) = \eta\mu(180^\circ + 30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ$ .
- Αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$  με  $0^\circ \leq \omega \leq 90^\circ$ , τότε μπορούμε να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας έχει σχέση με τη γωνία  $\omega$  ( $90^\circ \pm \omega$ ,  $180^\circ \pm \omega$ ,  $270^\circ \pm \omega$ ,  $360^\circ \pm \omega$ ).
- Οι γωνίες  $\frac{\pi}{2} - x$ ,  $\frac{\pi}{2} + x$  είναι παραπληρωματικές. Οι γωνίες  $\frac{\pi}{4} + x$ ,  $\frac{\pi}{4} - x$  είναι συμπληρωματικές.

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ****1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:**

- i) Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ, τότε η τιμή του  $\eta\mu(B + \Gamma)$  ισούται με:
- α)  $\eta\mu A$                       β)  $\sigma\upsilon\nu A$                       γ)  $-\eta\mu A$                       δ)  $\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma)$
- ii) Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $A = 90^\circ$ ), τότε η τιμή του  $\sigma\upsilon\nu B$  ισούται με:
- α)  $\sigma\upsilon\nu \Gamma$                       β)  $\eta\mu \Gamma$                       γ)  $\eta\mu B$                       δ)  $\epsilon\phi B$
- iii) Αν Α, Β, Γ γωνίες τριγώνου, τότε η τιμή της  $\epsilon\phi \frac{B + \Gamma}{2}$  ισούται με:
- α)  $\sigma\phi A$                       β)  $\sigma\phi \frac{A}{2}$                       γ)  $\sigma\phi \frac{B + \Gamma}{2}$                       δ)  $\epsilon\phi \frac{A}{2}$
- iv) Αν Α, Β, Γ είναι γωνίες τριγώνου, το  $\eta\mu 2A$  ισούται με:
- α)  $\eta\mu(B + \Gamma)$                       β)  $\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma)$                       γ)  $-\eta\mu(2B + 2\Gamma)$                       δ)  $\sigma\upsilon\nu(2B + 2\Gamma)$
- v) Αν  $\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , τότε η γωνία  $\omega$  ισούται με:
- α)  $\frac{5\pi}{6}$                       β)  $\frac{7\pi}{6}$                       γ)  $\frac{11\pi}{6}$                       δ)  $\frac{2\pi}{3}$
- vi) Αν  $\sigma\phi\omega = \sqrt{3}$ , τότε η τιμή της  $\epsilon\phi(270^\circ + \omega)$  ισούται με:
- α)  $\sqrt{3}$                       β)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       γ)  $-\sqrt{3}$                       δ)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- vii) Αν  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , τότε η τιμή του  $\eta\mu(270^\circ + \omega)$  ισούται με:
- α)  $\frac{1}{2}$                       β)  $-\frac{1}{2}$                       γ)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$                       δ)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- viii) Αν  $\epsilon\phi\omega = -\sqrt{3}$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{2}$ , τότε η τιμή της γωνίας  $\omega$  είναι:
- α)  $\frac{5\pi}{3}$                       β)  $\frac{2\pi}{3}$                       γ)  $\frac{4\pi}{3}$                       δ)  $\frac{\pi}{3}$
- ix) Αν  $\omega - \phi = \pi$ , τότε η τιμή του  $\sigma\upsilon\nu\omega$  είναι:
- α)  $\sigma\upsilon\nu\phi$                       β)  $-\sigma\upsilon\nu\phi$                       γ)  $\eta\mu\phi$                       δ)  $-\eta\mu\phi$
- x) Η τιμή του  $\eta\mu\left(\frac{15\pi}{2} + \omega\right)$  ισούται με:
- α)  $\sigma\upsilon\nu\omega$                       β)  $\eta\mu\omega$                       γ)  $-\eta\mu\omega$                       δ)  $-\sigma\upsilon\nu\omega$

**2. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το ίσο του στη στήλη Β.**

A	B	A	B
1. $\eta\mu 350^\circ$	α. $-\sqrt{3}$	1	
2. $\eta\mu \frac{11\pi}{6}$	β. $-\epsilon\phi 70^\circ$	2	
3. $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{3}$	γ. $-\eta\mu \frac{\pi}{18}$	3	
4. $\epsilon\phi 110^\circ$	δ. $-\eta\mu 45^\circ$	4	
5. $\sigma\phi \frac{5\pi}{6}$	ε. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	5	
6. $\sigma\upsilon\nu 200^\circ$	στ. $-\eta\mu 70^\circ$	6	
7. $\eta\mu 315^\circ$	ζ. $-\sigma\upsilon\nu 20^\circ$	7	
8. $\sigma\phi 210^\circ$	η. $-\frac{1}{2}$	8	
9. $\eta\mu 250^\circ$	θ. $\sqrt{3}$	9	
10. $\sigma\upsilon\nu 210^\circ$	ι. $\frac{1}{2}$	10	

**3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).**

- i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $A = 90^\circ$ ) ισχύει:  $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu \Gamma$  Σ  Λ
- ii) Ισχύει:  $\eta\mu 320^\circ + \eta\mu 40^\circ = 0$  Σ  Λ
- iii) Ισχύει:  $\sigma\upsilon\nu(7\pi + \theta) + \sigma\upsilon\nu\theta = 0$  Σ  Λ
- iv) Ισχύει:  $\sigma\upsilon\nu(135^\circ + \omega) + \sigma\upsilon\nu(45^\circ - \omega) = 0$  Σ  Λ
- v)  $\eta\mu(20^\circ + \omega) + \sigma\upsilon\nu(70^\circ - \omega) = 0$  Σ  Λ
- vi)  $\epsilon\phi(80^\circ + \theta) - \sigma\phi(10^\circ - \theta) = 0$  Σ  Λ
- vii)  $\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$  Σ  Λ
- viii)  $\eta\mu(190^\circ) = \eta\mu 10^\circ$  Σ  Λ
- ix)  $\epsilon\phi(13\pi + \theta) + \epsilon\phi\theta = 0$  Σ  Λ
- x)  $\sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha) = \sigma\upsilon\nu(\pi + \alpha)$  Σ  Λ
- xi)  $\eta\mu(45^\circ + \theta) - \sigma\upsilon\nu(45^\circ - \theta) = 0$  Σ  Λ
- xii)  $\epsilon\phi 2^\circ \epsilon\phi 5^\circ \epsilon\phi 88^\circ \epsilon\phi 85^\circ = 1$  Σ  Λ
- xiii)  $\eta\mu 10^\circ + \eta\mu 20^\circ - \eta\mu 80^\circ - \eta\mu 70^\circ = 0$  Σ  Λ

$$\text{xiv) } \sigma\phi(\pi + \theta) + \sigma\phi(-\theta) = 0$$

Σ □ Λ □

$$\text{xv) } \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta) = \eta\mu(90^\circ + \theta)$$

Σ □ Λ □

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ****A ομάδα**

**4.** Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

$$\text{α) } 1230^\circ \quad \text{β) } 1740^\circ \quad \text{γ) } 1935^\circ \quad \text{δ) } -930^\circ$$

**5.** Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

$$\text{α) } \frac{15\pi}{4} \quad \text{β) } \frac{35\pi}{6} \quad \text{γ) } -\frac{26\pi}{3} \quad \text{δ) } \frac{115\pi}{4}$$

**6.** Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\text{α) } A = \eta\mu 210^\circ \sigma\upsilon\nu 240^\circ + \epsilon\phi(-60^\circ) \eta\mu(300^\circ)$$

$$\text{β) } B = 6\eta\mu \frac{5\pi}{3} \eta\mu \frac{2\pi}{3} + 5\sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

**7.** Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\text{α) } A = 6\eta\mu 420^\circ \eta\mu 765^\circ + 8\sigma\upsilon\nu 750^\circ \sigma\upsilon\nu 1110^\circ$$

$$\text{β) } B = \eta\mu \frac{23\pi}{4} \eta\mu \frac{2\pi}{3} + 5\sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} \sigma\upsilon\nu \frac{27\pi}{4}$$

**8.** Αν  $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{1}{3}$  και  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ , να βρείτε τις τιμές:

$$\text{α) } \eta\mu(\theta - 90^\circ) \quad \text{β) } \sigma\upsilon\nu(270^\circ - \theta) \quad \text{γ) } \epsilon\phi(\pi + \theta)$$

**9.** Αν  $\epsilon\phi(440^\circ + \omega) = -3$  και  $180^\circ < \omega < 270^\circ$ , να βρείτε την τιμή της  $\sigma\phi(730^\circ - \omega)$

**10.** Αν  $\epsilon\phi 20^\circ = \kappa$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:  $A = \frac{\sigma\phi 430^\circ + 5 \sigma\phi 790^\circ}{6 \epsilon\phi 1100^\circ + 3 \epsilon\phi(-700^\circ)}$ .

**11.** Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\text{α) } A = \sigma\upsilon\nu 5^\circ + \sigma\upsilon\nu 10^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ - \eta\mu 85^\circ - \eta\mu 80^\circ - \eta\mu 70^\circ$$

$$\text{β) } B = \epsilon\phi(5^\circ + \omega) \epsilon\phi(85^\circ - \omega) \epsilon\phi 88^\circ \epsilon\phi 2^\circ$$

$$\text{γ) } \Gamma = \eta\mu \frac{\pi}{8} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{8} + \eta\mu \frac{3\pi}{8} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{8}$$

**12.** Να δείξετε ότι:

$$\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{10} + \omega\right) + \eta\mu^2\left(\frac{4\pi}{10} - \omega\right) = 1.$$

**13.** Να δείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi \frac{4\pi}{3} \sigma\varphi \frac{2\pi}{3} \eta\mu \frac{7\pi}{6} \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{4}$$

**14.** Να βρείτε τις τιμές του  $\eta\mu \frac{\lambda\pi}{4}$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{Z}$ .

**15.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sigma\upsilon\nu(\pi + x) \varepsilon\varphi(\pi - x)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \eta\mu(\pi + x) \varepsilon\varphi(2\pi - x)}$$

$$\beta) B = \frac{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \eta\mu\left(\frac{\pi}{8} + x\right) \sigma\upsilon\nu(3\pi + x)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) \eta\mu(5\pi - x)}$$

$$\gamma) \Gamma = \frac{\eta\mu(210^\circ + x) \varepsilon\varphi(470^\circ + x) \sigma\upsilon\nu(530^\circ + x)}{\sigma\upsilon\nu(240^\circ - x) \sigma\varphi(20^\circ + x) \eta\mu(260^\circ + x)}$$

**16.** Να δείξετε ότι:

$$\frac{\varepsilon\varphi(9\pi + x) \sigma\upsilon\nu(8\pi - x) \eta\mu\left(\frac{19\pi}{6} + x\right)}{\eta\mu(13\pi + x) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{22\pi}{3} - x\right)} = -1$$

**17.** Να δείξετε ότι η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του x:

$$A = 5\eta\mu^2\left(\frac{37\pi}{2} + x\right) + 2\eta\mu\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu(\pi + x) - 3\eta\mu(\pi - x)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)$$

**18.** Αν  $\varepsilon\varphi(\pi + x) + \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 5$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \varepsilon\varphi^2x + \sigma\varphi^2x$$

**19.** Να δείξετε ότι:  $\sigma\upsilon\nu(k\pi + x) = (-1)^k \sigma\upsilon\nu x$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**20.** Να δείξετε ότι:  $\sigma\upsilon\nu^2(x + 12^\circ) + \sigma\upsilon\nu^2(102^\circ + x) = 1$ .

**21.** Να δείξετε ότι:  $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu(90^\circ - x) - \sigma\upsilon\nu(270^\circ + x) + \eta\mu(270^\circ - x) = 0$ .

**22.** Να δείξετε ότι:  $1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{65\pi}{9} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 \frac{2\pi}{9}}$

**23.** Αν  $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$ , να δείξετε ότι:  $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta = 1$ .

**B ομάδα**

**24.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ, να δείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu(A + B) = -\eta\mu(\Gamma + \Delta) \qquad \beta) \epsilon\varphi\left(\frac{A + \Gamma}{2}\right) = -\epsilon\varphi\left(\frac{B + \Delta}{2}\right)$$

**25.** Να δείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{21\pi}{2} - x\right)}{\epsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sigma\varphi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \sigma\upsilon\nu^4 x - \sigma\upsilon\nu^2 x.$$

**26.** Αν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , να δείξετε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \epsilon\varphi(3\pi + x) < 3\sigma\upsilon\nu x + 1.$$

**27.** Αν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , να δείξετε ότι:  $\eta\mu\left(\frac{17\pi}{2} + x\right) \sigma\upsilon\nu(11\pi + x) < \eta\mu(19\pi - x) + 1.$

**28.** Αν  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , να δείξετε ότι:

$$0 < \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\epsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \epsilon\varphi(3\pi + x)} < 1.$$

**29.** Αν  $0^\circ < \omega < 70^\circ$  και  $\sigma\varphi(200^\circ + \omega) = 5$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 3\epsilon\varphi(250^\circ - \omega) + 5\sigma\varphi(740^\circ + \omega).$$

**30.** Δίνεται σημείο  $M(x,y)$  του επιπέδου με  $x = 2 + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$  και  $y = -3 + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right).$

Να δείξετε ότι για κάθε  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  το σημείο  $M$  είναι σημείο τόξου ενός κύκλου κέντρου  $K(2,-3)$  και ακτίνας  $R = 1.$

**31.** Στο τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΜ είναι κάθετη και ίση με την πλευρά ΑΒ. Να δείξετε ότι:  $\sigma\varphi A = \epsilon\varphi(135^\circ + \Gamma).$

**32.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι ισχύει:  $\epsilon\varphi\left(\frac{A+B}{4}\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\Gamma+\Delta}{4}\right)$

**33.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΚ, ΒΖ ύψη του τριγώνου και  $A + B = \frac{2\pi}{3}$ . Να δείξετε ότι:

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + A\right) = \frac{AK}{BZ} \cdot \eta\mu A.$$

**ΤΕΣΤ 1<sup>ο</sup>**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>:** Α. Ποια σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που διαφέρουν κατά 180<sup>ο</sup>;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:  $\eta\mu A = -\eta\mu(B + \Gamma)$ . Σ  Λ

ii) Ισχύει:  $\eta\mu(37\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$  Σ  Λ

iii) Ισχύει:  $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) + \sigma\varphi(270^\circ - \omega) = 0$  Σ  Λ

iv) Ισχύει:  $\epsilon\varphi 1935^\circ = 1$  Σ  Λ

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>:** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\epsilon\varphi(495^\circ) \eta\mu(480^\circ) \sigma\upsilon\nu(945^\circ)}{\sigma\varphi(225^\circ) \eta\mu(840^\circ) \sigma\upsilon\nu(1020^\circ)}$$

**ΤΕΣΤ 2<sup>ο</sup>**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>:** Α. Ποια σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που έχουν άθροισμα 180<sup>ο</sup>;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:  $\epsilon\varphi A + \epsilon\varphi(B + \Gamma) = 0$ . Σ  Λ

ii) Ισχύει:  $\epsilon\varphi(\pi - \omega) = \epsilon\varphi(2\pi - \omega)$  Σ  Λ

iii) Ισχύει:  $\eta\mu(270^\circ - \omega) + \sigma\upsilon\nu(450^\circ - \omega) = 0$  Σ  Λ

iv) Ισχύει:  $\eta\mu 80^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ - \eta\mu 100^\circ + \sigma\upsilon\nu 160^\circ = 0$  Σ  Λ

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>:** Να δείξετε ότι:

$$\eta\mu^2(\pi + x) \geq 2\eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2} - x\right) - \sigma\upsilon\nu^2(5\pi - x).$$