

**3.4 Οι Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις**

**ΘΕΩΡΙΑ**

**● Περιοδική Συνάρτηση**

Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $T > 0$  τέτοιος, ώστε για κάθε  $x \in A$  να ισχύει:

i)  $x + T \in A, x - T \in A$  ii)  $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$  (  $T$  λέγεται περίοδος της  $f$  )

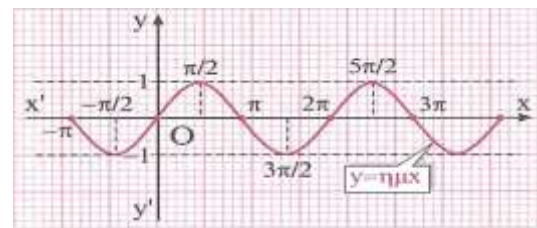
**● Μελέτη  $f(x) = \eta\mu x$**

- έχει πεδίο ορισμού:  $A = \mathbb{R}$ .
- είναι περιοδική με περίοδο  $T = 2\pi$ .
- είναι περιττή και έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο  $O(0,0)$ .
- έχει μέγιστο για  $x = \frac{\pi}{2}$ , το  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .
- έχει ελάχιστο για  $x = \frac{3\pi}{2}$ , το  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ .
- έχει σύνολο τιμών το διάστημα:  $[-1,1]$ .

Πίνακας Μεταβολών

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\eta\mu x$	0	1	0	-1	0

$\swarrow$  max  $\searrow$   $\swarrow$  min  $\searrow$



Γραφική Παράσταση

**● Μελέτη  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$**

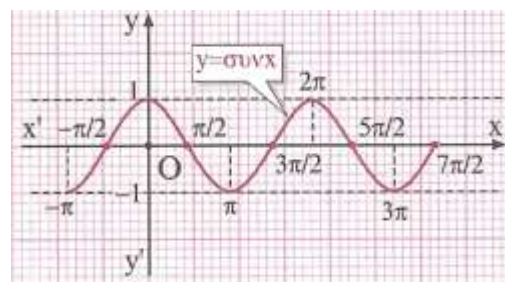
- έχει πεδίο ορισμού:  $A = \mathbb{R}$ .
- είναι περιοδική με περίοδο  $T = 2\pi$ .
- είναι άρτια με άξονα συμμετρίας τον άξονα  $y'y$ .
- έχει μέγιστο για  $x = 0$  το  $f(0) = 1$ .
- έχει ελάχιστο για  $x = \pi$  το  $f(\pi) = -1$ .
- έχει σύνολο τιμών το διάστημα:  $[-1,1]$

Πίνακας Μεταβολών

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sigma\upsilon\nu x$	1	0	-1	0	1

$\swarrow$  Max  $\searrow$   $\swarrow$  min  $\searrow$

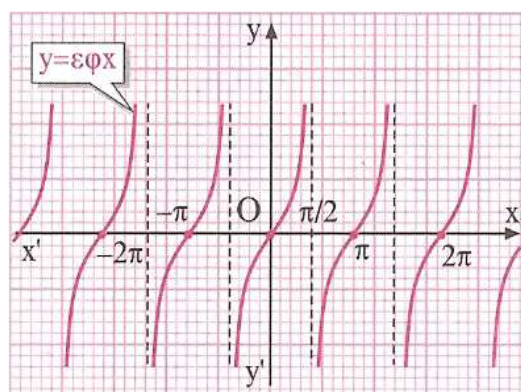
Γραφική Παράσταση



### ● Μελέτη $f(x) = \epsilon\phi x$

- έχει πεδίο ορισμού:  $A = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- είναι περιοδική με  $T = \pi$ .
- είναι περιττή με κέντρο συμμετρίας το σημείο  $O(0,0)$ .
- έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες  $x = -\frac{\pi}{2}$  και  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  και είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

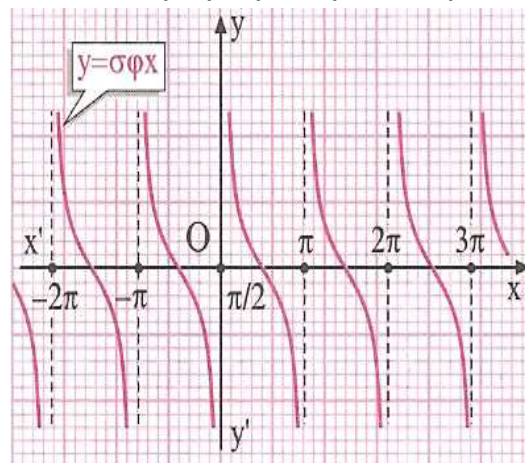
#### Γραφική Παράσταση



### ● Μελέτη $f(x) = \sigma\phi x$

- έχει πεδίο ορισμού  $A = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .
- είναι περιττή με κέντρο συμμετρίας το σημείο  $O(0,0)$ .
- έχει ασύμπτωτες τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = \pi$ .
- έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  και είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0,\pi)$ .

#### Γραφική Παράσταση



### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

- Η συνάρτηση  $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x$  έχει μέγιστη τιμή  $|\rho|$  και ελάχιστη τιμή  $-|\rho|$  και η περίοδος της συνάρτησης είναι:  $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ .
- Η συνάρτηση  $f(x) = \rho \cdot \sigma\upsilon\eta\chi$  έχει μέγιστη τιμή  $|\rho|$  και ελάχιστη τιμή  $-|\rho|$  και η περίοδος της συνάρτησης είναι:  $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ .
- Η συνάρτηση  $f(x) = \rho \cdot \eta\mu\omega x + \kappa$  έχει μέγιστο  $|\rho| + \kappa$ , ελάχιστο  $-|\rho| + \kappa$  και  $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ , ( $\kappa \in \mathbb{R}$ ).
- Η συνάρτηση  $f(x) = \rho \cdot \epsilon\phi\omega x$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = \frac{\pi}{|\omega|}$ . (ομοίως για  $\rho \cdot \sigma\phi\omega x$ )
- Αν  $\rho < 0$ , τότε οι γραφικές παραστάσεις των  $\rho\eta\mu\chi$ ,  $\rho\sigma\upsilon\eta\chi$ ,  $\rho\epsilon\phi\chi$  είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'x$ , αντίστοιχα των  $|\rho|\eta\mu\chi$ ,  $|\rho|\sigma\upsilon\eta\chi$ ,  $|\rho|\epsilon\phi\chi$ .
- Οι συναρτήσεις  $f(x) = \epsilon\phi\chi$ ,  $f(x) = \sigma\phi\chi$  δεν έχουν ακρότατα.

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ****1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:**

i) Η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu x + 5$  είναι:

- α) άρτια                      β) περιττή                      γ) ούτε άρτια ούτε περιττή

ii) Η συνάρτηση  $f(x) = -\sigma\phi x$  είναι περιοδική με περίοδο:

- α)  $\pi$                       β)  $2\pi$                       γ)  $\frac{\pi}{2}$                       δ)  $\frac{3\pi}{2}$

iii) Η συνάρτηση  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$  έχει:

- α) άξονα συμμετρίας τον  $y'y$                       β) κέντρο συμμετρίας το  $O(0,0)$   
 γ) άξονα συμμετρίας τον  $x'x$

iv) Η συνάρτηση  $f(x) = -2\eta\mu x$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα:

- α)  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$                       β)  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$                       γ)  $[0, 2\pi]$                       δ)  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

v) Η συνάρτηση  $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu x + 3$  έχει μέγιστη τιμή:

- α) 4                      β) 3                      γ) 7                      δ) 1

vi) Η συνάρτηση  $f(x) = 8\eta\mu x + 2$  παρουσιάζει ελάχιστη τιμή -6 στη θέση:

- α)  $x = \frac{\pi}{2}$                       β)  $x = \pi$                       γ)  $x = \frac{3\pi}{2}$                       δ)  $x = 2\pi$

vii) Η συνάρτηση  $f(x) = 2\sigma\phi x + 5$  έχει:

- α) μέγιστη τιμή                      β) ελάχιστη τιμή                      γ) ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη

viii) Η συνάρτηση  $f(x) = -\epsilon\phi x + 8$  είναι:

- α) γνησίως αύξουσα στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$                       β) γνησίως αύξουσα στο  $(-\pi, \pi)$   
 γ) γνησίως φθίνουσα στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$                       δ) γνησίως φθίνουσα στο  $(0, \pi)$

ix) Η συνάρτηση  $f(x) = 4\eta\mu 8x$  έχει:

- α) μέγιστο 4 και περίοδο  $\frac{\pi}{4}$                       β) μέγιστο 4 και περίοδο  $2\pi$   
 γ) μέγιστο 4 και περίοδο  $\pi$                       δ) ελάχιστο 4 και περίοδο  $\frac{\pi}{2}$

x) Η συνάρτηση  $f(x) = 5\sigma\phi(-3x)$  έχει περίοδο:

- α)  $\pi$                       β)  $\frac{\pi}{2}$                       γ)  $\frac{\pi}{6}$                       δ)  $\frac{\pi}{3}$

xi) Αν  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x$  και  $-\pi < x_1 < x_2 < 0$ , τότε ισχύει:

- α)  $f(x_1) < f(x_2)$       β)  $f(x_1) \leq f(x_2)$       γ)  $f(x_1) > f(x_2)$       δ)  $f(x_1) \geq f(x_2)$

xii) Η συνάρτηση  $f(x) = 3\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$  έχει περίοδο:

- α)  $\pi$                       β)  $\frac{\pi}{3}$                       γ)  $2\pi$                       δ)  $\frac{2\pi}{3}$

xiii) Αν η περίοδος της συνάρτησης  $f(x) = 2\eta\mu\beta x$  είναι  $T = \frac{\pi}{8}$ , τότε η τιμή του  $\beta$  είναι:

- α) 16                      β)  $\frac{1}{2}$                       γ)  $\frac{1}{4}$                       δ) 4

xiv) Το σύνολο τιμών της  $f(x) = -5\eta\mu x$  είναι:

- α)  $[-1,1]$                       β)  $[-5,5]$                       γ)  $[0,5]$                       δ)  $[-5,0]$

## 2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- i) Η συνάρτηση  $f(x) = 4\eta\mu(-x)$  είναι περιττή. Σ  Λ
- ii) Η συνάρτηση  $f(x) = \epsilon\phi 2x$  έχει περίοδο  $2\pi$ . Σ  Λ
- iii) Για τη συνάρτηση  $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$  ισχύει:  $|f(x)| \leq 4$ . Σ  Λ
- iv) Η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  για  $x \in [0, 2\pi]$  είναι άρτια. Σ  Λ
- v) Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$  έχει περίοδο  $2\pi$ . Σ  Λ
- vi) Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)$  έχει περίοδο  $\frac{\pi}{2}$ . Σ  Λ
- vii) Η συνάρτηση  $f(x) = \epsilon\phi x$  ορίζεται στο διάστημα  $(0, \pi)$ . Σ  Λ
- viii) Αν η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  έχει περίοδο  $T$ , τότε έχει περίοδο και  $3T$ . Σ  Λ
- ix) Η συνάρτηση  $f(x) = -\sigma\upsilon\nu x$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Σ  Λ
- x) Η ελάχιστη τιμή της  $f(x) = -5\eta\mu x + 8$  είναι  $-5$ . Σ  Λ
- xi) Οι ασύμπτωτες της  $f(x) = \epsilon\phi x$  είναι οι ευθείες  $x = 0$ ,  $x = \pi$ . Σ  Λ
- xii) Η συνάρτηση  $f(x) = 3|\eta\mu x| + 2$  έχει ελάχιστη τιμή 2. Σ  Λ
- xiii) Η ευθεία  $\epsilon: y = 2$  δεν τέμνει τη καμπύλη της  $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu x + 1$ . Σ  Λ
- xiv) Η ευθεία  $\epsilon: y = 3$  τέμνει την καμπύλη της  $f(x) = -4\eta\mu x$ . Σ  Λ

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ****A ομάδα**

**3.** Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων:

$$\begin{array}{lll} \alpha) f(x) = \eta\mu x & g(x) = \eta\mu x + 2 & h(x) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ \beta) f(x) = -\sigma\upsilon\nu x & g(x) = -\sigma\upsilon\nu x + 2 & h(x) = -\sigma\upsilon\nu(x - \pi) + 2 \end{array}$$

**4.** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, καθώς και την περίοδο των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = 4\eta\mu 2x \quad \beta) f(x) = -5\eta\mu 4x + 6 \quad \gamma) f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 5$$

**5.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$ .

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  γράφεται:  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)$ .

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, καθώς και την περίοδο της συνάρτησης.

**6.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$  είναι άρτια.

**7.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 5\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 3\sigma\upsilon\nu(\pi + 2x)$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  γράφεται:  $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x$ .

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, καθώς και την περίοδο  $T$  της  $f$ .

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε διάστημα  $[0, T]$ .

**8.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \kappa + \lambda \cdot \eta\mu x$ , ( $\lambda > 0$ ): αν η συνάρτηση  $f$  έχει μέγιστη τιμή 4 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ , να βρείτε τις τιμές των  $\kappa, \lambda$ .

**9.** Να διατάξετε τους παρακάτω αριθμούς σε αύξουσα τάξη:

α)  $\eta\mu \frac{29\pi}{18}$ ,  $\eta\mu \frac{15\pi}{9}$ ,  $\eta\mu \frac{\pi}{6}$ ,  $\eta\mu \frac{16\pi}{9}$ ,  $\eta\mu \frac{\pi}{4}$

β)  $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$ ,  $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{18}$ ,  $\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}$ ,  $\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{9}$

**10.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f(x) = \epsilon\phi x^2 + 2$  είναι περιοδική.

**Β ομάδα**

**11.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = 5\eta\mu 2x$ .

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, καθώς και την περίοδο  $T$  αυτής.

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας στο  $[0, T]$ .

**12.** Να λύσετε την ανίσωση  $2\eta\mu\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$ , αν γνωρίζουμε ότι:  $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}$ .

**13.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a + \rho \cdot \eta\mu\beta x$ , ( $\beta, \rho > 0$ ), αν έχει μέγιστη τιμή 6, ελάχιστη τιμή - 2 και περίοδο  $T = \frac{\pi}{3}$ , να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta, \rho$ .

**14.** Αν η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x) = (\lambda^2 + 2)\sigma\upsilon\nu 4x + 3\lambda$  είναι - 6. Να βρείτε:

α) την τιμή του  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

β) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με την ευθεία

$$\varepsilon: y = 21, \text{ αν επιπλέον } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

**15.** α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f(x) = \rho \cdot \eta\mu \frac{x}{2} + \kappa$  με  $\kappa, \rho \in \mathbb{R}$ , αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(\pi, 2)$  και  $B(3\pi, 6)$ .

β) Για τις τιμές των  $\kappa, \rho$  που βρήκατε, να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  έχει κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = x^2 + 4x + 7$ .

**16.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = 4\eta\mu \frac{x}{2} + 6\sigma\upsilon\nu \frac{x}{5}$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = 20\pi$ .

**17.** Η προσέλευση επισκεπτών σε έναν τουριστικό προορισμό δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο  $A = 20 + 4\eta\mu \frac{\pi t}{6}$ , σε εκατοντάδες (όπου  $t$  ο χρόνος σε μήνες,  $0 \leq t \leq 12$ ).

α) Να βρείτε ποιο μήνα επισκέφθηκαν περισσότεροι τον προορισμό και πόσοι ήταν.

β) Να εξετάσετε ποιους μήνες αυξανόταν η προσέλευση των επισκεπτών.

γ) Ποια ήταν η διαφορά ανάμεσα στους λιγότερους και τους περισσότερους επισκέπτες.

**ΤΕΣΤ 1<sup>ο</sup>****ΘΕΜΑ1<sup>ο</sup>:** Α. Πότε μια συνάρτηση είναι περιοδική;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Η μέγιστη τιμή της  $f(x) = (-k^2 + 4) \cdot \eta\mu x$  είναι 4 με  $k \in \mathbb{R}$ . Σ  Λ ii) Η περίοδος της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu \frac{x}{4}$  είναι  $T = 4\pi$ . Σ  Λ iii) Η συνάρτηση  $f(x) = -\eta\mu x$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  
διαστήμα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Σ  Λ iv) Η συνάρτηση  $f(x) = \epsilon\phi x^2$  είναι άρτια στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Σ  Λ **ΘΕΜΑ2<sup>ο</sup>:** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a \cdot \eta\mu\beta x + \kappa$ , η οποία έχει μέγιστο 6, περίοδο  $\pi$  και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A\left(\frac{\pi}{2}, 4\right)$ .α) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς  $a$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$ .β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας στο διάστημα  $[0, \pi]$ , αν  $a = \beta = 2$ .**ΤΕΣΤ 2<sup>ο</sup>****ΘΕΜΑ1<sup>ο</sup>:** Α. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Η ελάχιστη τιμή της  $A = 2\eta\mu x - 8\sigma\upsilon\nu x + 4$  είναι -6. Σ  Λ ii) Η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x^3$  είναι άρτια. Σ  Λ iii) Οι συναρτήσεις  $f(x) = \eta\mu x$ ,  $g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$  έχουν ίδιες  
γραφικές παραστάσεις. Σ  Λ iv) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$  έχει  
δύο κοινά σημεία με την ευθεία  $\epsilon: y = 1$ . Σ  Λ **ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>:** Η πορεία των εσόδων μιας επιχείρησης καθορίζεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = 10 + 6\sigma\upsilon\nu \frac{\pi t}{3}, \text{ σε χιλιάδες Ευρώ ( } t \text{ ο χρόνος σε μήνες, } 0 < t \leq 12).$$

α) Ποιους μήνες έχει τα μεγαλύτερα και ποιους τα μικρότερα έσοδα;  
( $t = 1$  Ιανουάριος)

β) Αν το κόστος λειτουργίας είναι 10.000 Ευρώ, τότε έχει ζημιές;