

### 3.5 Βασικές Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

#### ΘΕΩΡΙΑ

- Εξίσωση  $\eta\mu x = a$

Αν  $\eta\mu\theta = a$  τότε:

$$x = 2k\pi + \theta$$

$$\text{ή } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi + \pi - \theta$$

- Εξίσωση  $\sigma\upsilon\nu x = a$

Αν  $\sigma\upsilon\nu\theta = a$  τότε:

$$x = 2k\pi + \theta$$

$$\text{ή } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi - \theta$$

- Εξίσωση  $\epsilon\phi x = a$

Αν  $\epsilon\phi\theta = a$ , τότε :

$$x = k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Εξίσωση  $\sigma\phi x = a$

Αν  $\sigma\phi\theta = a$ , τότε:

$$x = k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

#### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

- Η γενική λύση της  $\eta\mu x = 0$  είναι:  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- Η γενική λύση της  $\eta\mu x = 1$  είναι:  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .
- Η γενική λύση της  $\sigma\upsilon\nu x = 0$  είναι:  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .
- Η γενική λύση της  $\sigma\upsilon\nu x = 1$  είναι:  $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- Οι εξισώσεις  $\eta\mu x = \kappa, \sigma\upsilon\nu x = \lambda$  είναι αδύνατες αν  $|\kappa| > 1$  και  $|\lambda| > 1$ .
- Εξισώσεις της μορφής  $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\theta$  τρέπονται σε μορφή:  $\eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ .
- Εξισώσεις της μορφής  $\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\theta$  τρέπονται σε μορφή:  $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ .
- Εξισώσεις της μορφής  $\epsilon\phi x = \sigma\phi\theta$  τρέπονται σε μορφή:  $\epsilon\phi x = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ .
- Εξισώσεις της μορφής  $\sigma\phi x = \epsilon\phi\theta$  τρέπονται σε μορφή:  $\sigma\phi x = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ .

**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ****1. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:**

i) Η εξίσωση  $2\eta\mu x = 1$  έχει λύσεις:

α)  $x = 2κπ \pm \frac{\pi}{3}$     β)  $x = 2κπ + \frac{\pi}{6}$  ή  $x = 2κπ + \frac{5\pi}{6}$     γ)  $x = 2κπ \pm \frac{\pi}{6}$

ii) Οι λύσεις της εξίσωσης  $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$  στο διάστημα  $[0, 2\pi)$  είναι:

α) ακριβώς μια    β) δύο λύσεις    γ) άπειρες λύσεις    δ) καμία λύση

iii) Η εξίσωση  $(\sigma\upsilon\nu x + 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$ , έχει στο διάστημα  $[0, \pi)$ :

α) δύο λύσεις    β) καμία λύση    γ) τέσσερεις λύσεις    δ) μια λύση

iv) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x + 1}$  είναι:

α)  $A = \mathbb{R}$     β)  $A = \mathbb{R} - \{2κπ + \pi, κ \in \mathbb{Z}\}$     γ)  $A = \mathbb{R} - \{κπ, κ \in \mathbb{Z}\}$

v) Η εξίσωση  $\epsilon\phi x = \sigma\phi x$  έχει λύσεις της μορφής:

α)  $\frac{κπ}{4} + \frac{\pi}{4}$     β)  $κπ + \frac{\pi}{4}$     γ)  $κπ$     δ)  $2κπ$     ( $κ \in \mathbb{Z}$ )

vi) Αν σε ένα τρίγωνο ABΓ ισχύει  $\eta\mu\Gamma = \sigma\upsilon\nu B$ , τότε είναι:

α) οξυγώνιο    β) αμβλυγώνιο    γ) ορθογώνιο    δ) δεν υπάρχει τρίγωνο

vii) Αν σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ABΓ ισχύει  $\eta\mu 3A = \eta\mu A$ , τότε η γωνία ισούται με:

α)  $A = 30^\circ$     β)  $A = 45^\circ$     γ)  $A = 60^\circ$     δ)  $A = 20^\circ$

viii) Η λύση της εξίσωσης  $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) = 0$  είναι:

α)  $\pi$     β)  $2\pi$     γ)  $\frac{\pi}{2}$     δ)  $\frac{\pi}{4}$

ix) Η εξίσωση  $\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi 4x = 1$ ,  $0 < 4x < \pi$ , έχει ίδιες λύσεις με την εξίσωση:

α)  $\epsilon\phi x = \sigma\phi 4x$     β)  $\sigma\phi x = \sigma\phi 4x$     γ)  $\epsilon\phi x = 1$     δ)  $\epsilon\phi 4x = 1$

x) Η εξίσωση  $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu 5x$  έχει τις ίδιες λύσεις με την εξίσωση:

α)  $\eta\mu 2x = \eta\mu(\pi - 5x)$     β)  $\eta\mu 2x = \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - 5x\right)$     γ)  $\eta\mu 2x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$

xi) Η εξίσωση  $\epsilon\phi|x| = 1$  έχει στο διάστημα  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ :

α) μια λύση    β) καμία λύση    γ) δύο λύσεις    δ) άπειρες λύσεις

**2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).**

- i) Αν μια τριγωνομετρική εξίσωση έχει μια λύση, τότε έχει άπειρες. Σ  Λ
- ii) Η εξίσωση  $\eta\mu x = \frac{\pi}{4}$  είναι αδύνατη. Σ  Λ
- iii) Αν στο ABΓ τρίγωνο ισχύει  $\epsilon\phi\beta = \sigma\phi\gamma = 1$ , τότε είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Σ  Λ
- iv) Η μέγιστη τιμή της  $f(x) = 4\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$  προκύπτει για  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ . Σ  Λ
- v) Η εξίσωση  $\eta\mu^2 x - 2 = 0$  είναι αδύνατη. Σ  Λ
- vi) Η εξίσωση  $|\sigma\upsilon\nu x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$  έχει στο  $[0, 2\pi)$  δύο λύσεις. Σ  Λ
- vii) Η εξίσωση  $\epsilon\phi x = 2015$  είναι αδύνατη. Σ  Λ
- viii) Η εξίσωση  $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 1$  έχει λύση την  $x = \frac{\pi}{6}$  στο  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Σ  Λ
- ix) Μία λύση της εξίσωσης  $\eta\mu x + \eta\mu 2x + \eta\mu 3x + \eta\mu 4x = 0$  είναι η  $x = 0$ . Σ  Λ
- x) Μία λύση της  $\sigma\upsilon\nu(x + \pi) = 1$  είναι η  $x = 2\pi$ . Σ  Λ
- xi) Οι εξισώσεις  $\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$  με ( $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ ) και  $\epsilon\phi x = 1$  έχουν ίδιες λύσεις. Σ  Λ
- xii) Η εξίσωση  $2\eta\mu x + \sqrt{3} = 0$  έχει λύση στο διάστημα  $[0, \pi]$ . Σ  Λ

**3. Να αντιστοιχίσετε στις εξισώσεις της στήλης Α, μια από τις λύσεις τους που βρίσκονται στη στήλη Β:**

| Α   | Β                   |
|---|---------------------|
| 1. $2\eta\mu x = 1$                           | α. $\frac{3\pi}{2}$ |
| 2. $\epsilon\phi x = -1$                      | β. $\frac{\pi}{6}$  |
| 3. $\sigma\phi x = -\sqrt{3}$                 | γ. $\frac{3\pi}{4}$ |
| 4. $\eta\mu x = -1$                           | δ. $\pi$            |
| 5. $\sigma\upsilon\nu x = -1$                 | ε. $-\frac{\pi}{6}$ |
| 6. $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | στ. $\frac{\pi}{4}$ |

| Α  | Β |
|----|---|
| 1. |   |
| 2. |   |
| 3. |   |
| 4. |   |
| 5. |   |
| 6. |   |

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ****A ομάδα****4.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $2\eta\mu x = -1$

β)  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

γ)  $\eta\mu 3x = 1$

δ)  $\sigma\phi 2x = -\sqrt{3}$

ε)  $2\eta\mu^2 x - 1 = 0$

στ)  $\sqrt{2}\eta\mu x = -1$

**5.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $\eta\mu(3x + \pi) = 1$

β)  $\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

γ)  $\epsilon\phi\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

**6.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $\eta\mu^3 x - \eta\mu x = 0$

β)  $\eta\mu^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

γ)  $(2\eta\mu x + \sqrt{3})(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$

δ)  $|\eta\mu x + 1| + (\epsilon\phi\theta + 1)^2 = 0$

**7.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $\eta\mu 3x = \sigma\upsilon\nu 4x$

β)  $\epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

γ)  $\epsilon\phi 2x \cdot \sigma\phi(\pi + x) = 1$

δ)  $2\eta\mu 5\pi x = \sqrt{3}$

ε)  $\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x = \eta\mu x \cdot \eta\mu 4x$

στ)  $\eta\mu^2 3x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

**8.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $3\eta\mu x = -\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

β)  $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu x\right) = 1, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

γ)  $\frac{\epsilon\phi x}{\sigma\phi x} = 3$

δ)  $\sigma\phi\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\phi\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

ε)  $\sigma\phi(\pi\eta\mu x) = 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

στ)  $\sqrt{2}\epsilon\phi x = 2\eta\mu x$

**9.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = 2 + \frac{1}{\eta\mu x - 1}$

β)  $f(x) = \frac{x^3}{\epsilon\phi x - 1}$

γ)  $f(x) = \frac{x\eta\mu x + 3}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$

**10.** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων, καθώς και τις τιμές του  $x \in [0, 2\pi)$  που τις παρουσιάζουν:

α)  $f(x) = 2 + 4\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

β)  $f(x) = 3 - 2\sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

γ)  $f(x) = |4\eta\mu(2x + \pi)|$

**11.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $2\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x - 3 = 0$

β)  $\epsilon\phi x - \sqrt{3}\sigma\phi x = \sqrt{3} - 1$

γ)  $\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x = 4$

**12.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $2\eta\mu x + \sqrt{3} = 0, x \in [0, 3\pi)$

β)  $\epsilon\phi 4x = \sigma\phi x, x \in (\pi, 5\pi)$

γ)  $\sigma\phi(2x + \pi) = -1, x \in [0, 4\pi]$

**B ομάδα****13.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $2\eta\mu x \cdot \epsilon\phi x - 2\eta\mu x - \epsilon\phi x + 1 = 0$

β)  $2\eta\mu^3 x + 3\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x - 2 = 0$

**14.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $\epsilon\phi 5x \cdot \epsilon\phi 6x = 1$     β)  $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 1$     γ)  $2\eta\mu x - \frac{\sqrt{6}}{2\eta\mu x} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

δ)  $\eta\mu^2 x - (\sqrt{3} + 1)\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$     ε)  $\sigma\upsilon\nu^4 x + 3\eta\mu^2 x - 1 = 0$

**15.** α) Να δείξετε ότι:  $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = 2\sigma\phi x$ 

β) Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = -2.$

**16.** Να λύσετε την εξίσωση:  $\eta\mu(x - 2\pi) \epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sigma\upsilon\nu(x - \pi) + \eta\mu(x - \pi) = \frac{1}{2}.$ **17.** Να λύσετε την εξίσωση:  $\sigma\phi^2 x = \frac{1 - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}.$ **18.** Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = 5 + 2\epsilon\phi\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(x + \pi) = f(2x).$ **19.** Δίνεται  $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = a - \frac{2}{a}$ , όπου  $a$  θετικός ακέραιος και  $0 < x < 3\pi$ .α) Να βρείτε την τιμή του  $a$ .β) Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = a - \frac{2}{a}$ , όταν  $0 < x < 3\pi$ .**20.** Αν  $A = 60^\circ$  και  $\eta\mu\left(\frac{B + \Gamma}{2}\right) = \eta\mu(B - \Gamma)$ , να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου  $B, \Gamma$ .**21.** Να λυθεί η εξίσωση:  $\eta\mu[\pi(x^2 + 1)] = \eta\mu(\pi x)$ ,  $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .**22.** Να λυθεί η εξίσωση:  $|\sigma\upsilon\nu 4x + 1| + |5 - 4\sigma\upsilon\nu 4x| = |\sigma\upsilon\nu 4x - \sqrt{3}| + 6$ **23.** Η ζήτηση ενός προϊόντος περιγράφεται από την συνάρτηση  $f(t) = 800 + 400 \cdot \eta\mu \frac{\pi t}{6}$ , σε χιλιάδες τεμάχια, όπου  $t$  ο χρόνος σε μήνες. ( $t = 1$  Ιανουάριος).

α) Να βρείτε ποιο μήνα έχουμε τη μέγιστη ζήτηση και πόσο είναι.

β) Να βρείτε ποιο μήνα έχουμε το μισό της μέγιστης ζήτησης.

**ΤΕΣΤ 1°****ΘΕΜΑ1°:** Α. Να γράψετε τις λύσεις της εξίσωσης  $\eta\mu x = \eta\mu\theta$ .

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{συν}|x| = |\text{συν}x|$ . Σ  Λ ii) Η εξίσωση  $x^2 + (\eta\mu\omega)x + 1 = 0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , είναι αδύνατη. Σ  Λ iii) Η λύση της  $\sigma\phi x = 1$  είναι  $x = k\pi$ . Σ  Λ iv) Η εξίσωση  $\eta\mu x = \kappa^2 + \kappa + 2$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  είναι αδύνατη. Σ  Λ **ΘΕΜΑ2°:** α) Να λύσετε την εξίσωση:  $\text{συν}\left(x + \frac{\pi}{18}\right) + \eta\mu\left(\frac{4\pi}{9} - x\right) = 1$ .β) Να εξετάσετε αν οι λύσεις που βρήκατε στο ερώτημα α) είναι λύσεις της εξίσωσης:  $\eta\mu(3x - \pi) = -\frac{1}{2}$ .**ΤΕΣΤ 2°****ΘΕΜΑ1°:** Α. Να γράψετε τις λύσεις της εξίσωσης  $\text{συν}x = \text{συν}\theta$ .

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Η εξίσωση  $\epsilon\phi x \cdot \sigma\phi 2x = 1$  είναι ισοδύναμη με την  $\epsilon\phi x = \epsilon\phi 2x$ . Σ  Λ ii) Ισχύει για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ :  $\text{συν}(\text{συν}x) > 0$ . Σ  Λ iii) Ο αριθμός  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$  είναι λύση της εξίσωσης:  $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$ . Σ  Λ iv) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \frac{1}{2\text{συν}x+3}$  είναι το  $\mathbb{R}$ . Σ  Λ **ΘΕΜΑ2°:** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2\text{συν}x}$ 

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και της ευθείας  $\epsilon$  με εξίσωση  $\epsilon: y = 1$