

3.6 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών

ΘΕΩΡΙΑ

- Συνημίτονο διαφοράς γωνιών

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

- Συνημίτονο αθροίσματος γωνιών

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

- Ημίτονο διαφοράς γωνιών

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

- Ημίτονο αθροίσματος γωνιών

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

- Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos\alpha$, $\cos\beta \neq 0$.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$$

- Συνεφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin\alpha$, $\sin\beta \neq 0$.

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha \cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

- $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$, $\sin(\alpha - \beta) \neq \sin\alpha - \sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$, $\cos(\alpha - \beta) \neq \cos\alpha - \cos\beta$
- Για την εύρεση των $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$, πρέπει να γνωρίζουμε τους αριθμούς $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$.
- Για την εύρεση των $\tan(\alpha \pm \beta)$, $\cot(\alpha \pm \beta)$, πρέπει να γνωρίζουμε τους αριθμούς $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\cot\alpha$, $\cot\beta$.

- Όταν ζητούνται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω , συνήθως γράφουμε τη γωνία ω ως $\omega = \alpha + \beta$ ή $\omega = \alpha - \beta$, με α, β γνωστές γωνίες, και χρησιμοποιούμε τους αντίστοιχους τύπους.
- Όταν ζητείται να δείξουμε μια ισότητα για τις γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $A + B + \Gamma = 180^\circ$ ή $2A + 2B + 2\Gamma = 360^\circ$ ή $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 90^\circ$.
- Κάθε παράσταση της μορφής $\alpha \cdot \eta\mu\chi + \beta \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$ γράφεται $\alpha \cdot (\eta\mu\chi + \frac{\beta}{\alpha} \sigma\upsilon\nu\chi)$ και θέτουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \epsilon\phi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$.
- Όταν ζητείται να δειχθεί μια τριγωνομετρική ταυτότητα, αρχίζουμε από το μέλος που έχει τις περισσότερες πράξεις και με τη χρήση των τριγωνομετρικών τύπων των $\alpha \pm \beta$ καταλήγουμε στο άλλο μέλος ή χρησιμοποιούμε ισοδυναμίες μέχρι να καταλήξουμε σε αληθές.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Η παράσταση $\eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu(\alpha - \beta)$ ισούται:

α) $\eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$ β) $\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta$ γ) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\beta$ δ) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

ii) Για να ορίζεται η ισότητα: $\epsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha \epsilon\phi\beta}$, πρέπει:

α) $\alpha - \beta \neq \kappa\pi$ β) $\alpha - \beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ γ) $\alpha, \beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ δ) $\alpha, \beta, \alpha - \beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

iii) Για να ορίζεται η ισότητα: $\sigma\phi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta}$, πρέπει:

α) $\alpha + \beta \neq \kappa\pi$ β) $\alpha, \beta \neq \kappa\pi$ γ) $\alpha + \beta, \alpha, \beta \neq \kappa\pi$ δ) $\alpha, \beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

iv) Η τιμή του $\sigma\upsilon\nu 75^\circ$ ισούται με:

α) $\sigma\upsilon\nu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 45^\circ - \eta\mu 30^\circ \eta\mu 45^\circ$ β) $\sigma\upsilon\nu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 45^\circ + \eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 45^\circ$
 γ) $\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 45^\circ - \sigma\upsilon\nu 30^\circ \eta\mu 45^\circ$ δ) $\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 45^\circ + \sigma\upsilon\nu 30^\circ \eta\mu 45^\circ$

v) Η παράσταση $\sin(x + 10^\circ) \sin(x + 55^\circ) + \eta\mu(x + 10^\circ) \eta\mu(x + 55^\circ)$ ισούται με:

α) $\sin 65^\circ$ β) $\eta\mu 65^\circ$ γ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ δ) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

vi) Η τιμή της παράστασης: $\frac{\epsilon\phi 20^\circ + \epsilon\phi 40^\circ}{1 - \epsilon\phi 20^\circ \epsilon\phi 40^\circ}$ ισούται με:

α) 1 β) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ γ) $\sqrt{3}$ δ) $-\sqrt{3}$

vii) Η γωνία $\omega = \frac{\pi}{12}$, για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών της γράφεται:

α) $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{36}$ β) $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ γ) $\frac{\pi}{9} - \frac{\pi}{36}$ δ) $\frac{2\pi}{9} - \frac{5\pi}{36}$

viii) Η τιμή της $\sigma\phi(x + 45^\circ)$ ισούται με:

α) $\frac{\sigma\phi x + 1}{\sigma\phi x - 1}$ β) $\frac{1 - \sigma\phi x}{\sigma\phi x + 1}$ γ) $\frac{\sigma\phi x - 1}{\sigma\phi x + 1}$ δ) $\frac{2\sigma\phi x}{\sigma\phi x - 1}$

ix) Η τιμή της παράστασης: $A = \frac{\epsilon\phi 5\alpha + \epsilon\phi 3\alpha}{\epsilon\phi 5\alpha \epsilon\phi 3\alpha - 1}$ ισούται με:

α) $\epsilon\phi 2\alpha$ β) $\epsilon\phi 8\alpha$ γ) $-\epsilon\phi 8\alpha$ δ) $-\epsilon\phi 2\alpha$

x) Αν στο τρίγωνο ABΓ ισχύει: $\frac{\epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma}{1 - \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma} = -1$, τότε η γωνία A ισούται με:

α) 135° β) 120° γ) 45° δ) 150°

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Ισχύει: $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\eta\mu\beta - \sigma\upsilon\alpha\sigma\upsilon\eta\beta$ Σ Λ

ii) Ισχύει: $\eta\mu\alpha\eta\mu\beta + \sigma\upsilon\alpha\sigma\upsilon\eta\beta \leq 1$ Σ Λ

iii) Ισχύει: $\frac{\epsilon\phi x + 1}{\epsilon\phi x - 1} = \epsilon\phi(x + 45^\circ)$ Σ Λ

iv) Ισχύει: $\frac{\epsilon\phi 3x - \epsilon\phi x}{1 + \epsilon\phi x \epsilon\phi 3x} = \epsilon\phi 2x$ Σ Λ

v) Αν στο τρίγωνο ABΓ ισχύει: $\eta\mu B \eta\mu \Gamma - \sigma\upsilon\eta B \sigma\upsilon\eta \Gamma = 0$, τότε $A = 90^\circ$. Σ Λ

vi) Αν στο τρίγωνο ABΓ ισχύει: $\eta\mu \Gamma \sigma\upsilon\eta B + \eta\mu B \sigma\upsilon\eta \Gamma = 1$, τότε $A < 90^\circ$. Σ Λ

vii) Ισχύει: $\eta\mu 3x \sigma\upsilon\eta 2x + \eta\mu 2x \sigma\upsilon\eta 3x = \eta\mu 5x$ Σ Λ

viii) Ισχύει: $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$ Σ Λ

ix) Ισχύει: $\eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) = 2\sigma\upsilon\alpha\alpha \cdot \eta\mu\beta$ Σ Λ

x) Ισχύει: $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta} = \sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta$ Σ Λ

xi) Αν $\sin(B + \Gamma) = 0$, τότε το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο. Σ Λ

xii) Αν $\eta\mu B \sin \Gamma - \eta\mu \Gamma \sin B = 0$, τότε το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. Σ Λ

3. Να αντιστοιχίσετε τις παραστάσεις τις στήλης A με το ίσον τους στη στήλη B.

A	B
1. $\eta\mu(\alpha + \beta)$	α. $\sigma\upsilon\alpha\sigma\upsilon\alpha\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$
2. $\sin(\alpha + \beta)$	β. $\eta\mu\alpha\sin\beta + \sigma\upsilon\alpha\eta\mu\beta$
3. $\eta\mu(\alpha - \beta)$	γ. $\sigma\upsilon\alpha\sigma\upsilon\alpha\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$
4. $\sin(\alpha - \beta)$	δ. $\eta\mu\alpha\sin\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\alpha\alpha$
5. $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$	ε. $\frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta}$
6. $\sigma\phi(\alpha + \beta)$	στ. $\frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta}$
7. $\epsilon\phi(\alpha - \beta)$	ζ. $\frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\beta + \sigma\phi\alpha}$
8. $\sigma\phi(\alpha - \beta)$	η. $\frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$

A	B
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	
7.	
8.	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ**A ομάδα****4.** Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών, τις παραστάσεις:

α) $\sin 35^\circ \sin 10^\circ - \eta\mu 35^\circ \eta\mu 10^\circ$ β) $\eta\mu 40^\circ \sin 20^\circ + \eta\mu 20^\circ \sin 40^\circ$

γ) $\sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} - \eta\mu \frac{2\pi}{5} \eta\mu \frac{3\pi}{5}$ δ) $\eta\mu \frac{11\pi}{18} \sin \frac{2\pi}{18} - \eta\mu \frac{2\pi}{18} \sin \frac{11\pi}{18}$

5. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών, τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{\epsilon\phi 26^\circ + \epsilon\phi 34^\circ}{1 - \epsilon\phi 26^\circ \epsilon\phi 34^\circ}$$

$$\beta) \frac{\sigma\phi 40^\circ \sigma\phi 50^\circ - 1}{\sigma\phi 40^\circ + \sigma\phi 50^\circ}$$

$$\gamma) \frac{\epsilon\phi \frac{7\pi}{18} - \epsilon\phi \frac{4\pi}{18}}{1 + \epsilon\phi \frac{7\pi}{18} \epsilon\phi \frac{4\pi}{18}}$$

$$\delta) \frac{\sigma\phi \frac{5\pi}{18} \sigma\phi \frac{\pi}{36} + 1}{\sigma\phi \frac{5\pi}{18} - \sigma\phi \frac{\pi}{36}}$$

6. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή:

$$\alpha) \eta\mu 5x \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu 5x$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu 8x \sigma\upsilon\nu 3x + \eta\mu 8x \eta\mu 3x$$

$$\gamma) \sigma\upsilon\nu 7x \sigma\upsilon\nu 4x - \eta\mu 7x \eta\mu 4x$$

$$\delta) \eta\mu 6x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu 6x$$

7. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή:

$$\alpha) \frac{\epsilon\phi 4x - \epsilon\phi 3x}{1 + \epsilon\phi 4x \epsilon\phi 3x}$$

$$\beta) \frac{\epsilon\phi x + \epsilon\phi 2x}{1 - \epsilon\phi x \epsilon\phi 2x}$$

$$\gamma) \frac{\sigma\phi 6x \sigma\phi 2x - 1}{\sigma\phi 6x + \sigma\phi 2x}$$

$$\delta) \frac{\sigma\phi 2x \sigma\phi 4x + 1}{\sigma\phi 2x - \sigma\phi 4x}$$

8. Αν $\epsilon\phi\beta = \sigma\phi\gamma$, με $\eta\mu\gamma \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\beta \neq 0$, να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu(\beta + \gamma) = 0$

9. Αν για τις α, β γωνίες ισχύει $\eta\mu\alpha = \frac{1}{3}$ και $\eta\mu\beta = \frac{1}{4}$ με $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε την τιμή των $\eta\mu(\alpha + \beta)$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)$.

10. Να δείξετε ότι: $\frac{\sigma\phi^2 6x \sigma\phi^2 2x - 1}{\sigma\phi^2 2x - \sigma\phi^2 6x} = \sigma\phi 8x \cdot \sigma\phi 4x$.

11. Αν $\alpha + \beta = 60^\circ$, να δείξετε ότι: $\epsilon\phi\beta = \frac{\sqrt{3} - \epsilon\phi\alpha}{1 + \sqrt{3}\epsilon\phi\alpha}$

12. Αν $\sigma\phi\alpha = -\frac{1}{2}$ και $\sigma\phi\beta = 3$, να δείξετε ότι $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

13. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu 5x + \sigma\upsilon\nu 5x = 1$.

14. Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία A ισούται με 60° , να δείξετε ότι:

$$\epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = -\sqrt{3} + \sqrt{3} \epsilon\phi B \cdot \epsilon\phi \Gamma$$

15. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

16. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{3}\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

17. Να λύσετε την εξίσωση: $\text{συν}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \text{συν}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

18. Να δείξετε ότι: $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \eta\mu\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) - \text{συν}x = 0$

19. Να δείξετε ότι: $\text{εφ}(45^\circ + x) + \text{σφ}(45^\circ - x) = \frac{2(\eta\mu x + \text{συν}x)}{\text{συν}x - \eta\mu x}$

20. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = 165^\circ$.

21. α) Να δείξετε ότι: $\text{συν}(a + \beta) + \text{συν}(a - \beta) = 2\text{συν}a \text{συν}\beta$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $2\text{συν}4x \cdot \text{συν}6x = \text{συν}10x - \frac{1}{2}$.

γ) Να δείξετε ότι: $\text{συν}80^\circ + \text{συν}40^\circ = \text{συν}20^\circ$.

22. α) Να δείξετε ότι: $\eta\mu(a + \beta) + \eta\mu(a - \beta) = 2\eta\mu a \text{συν}\beta$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $2\eta\mu 8x \text{συν}2x = \eta\mu 6x + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

γ) Να δείξετε ότι: $\eta\mu 70^\circ + \eta\mu 50^\circ = \sqrt{3} \eta\mu 10^\circ$.

23. Να δείξετε ότι: $\frac{\text{εφ}3x + \text{εφ}5x}{1 - \text{εφ}3x \text{εφ}5x} = \frac{\text{εφ}x + \text{εφ}7x}{1 - \text{εφ}x \text{εφ}7x}$

24. Να δείξετε ότι:

$$\eta\mu 3x \cdot \text{συν}4x + \eta\mu 4x \cdot \text{συν}3x = \text{συν}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \text{συν}\left(\frac{\pi}{6} - 6x\right) - \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \eta\mu\left(\frac{\pi}{6} - 6x\right).$$

25. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\text{εφ}2x + \text{εφ}3x}{1 - \text{εφ}2x \text{εφ}3x} = \frac{\text{σφ}4x \text{σφ}6x + 1}{\text{σφ}6x - \text{σφ}4x}$

26. Να λύσετε την εξίσωση: $\text{εφ}(2x + \pi) + \text{σφ}(2x + \pi) = 2$.

27. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90^\circ$) και σημείο Δ της πλευράς ΑΓ. Αν $\hat{\omega} = \Delta\hat{B}\Gamma$,

να δείξετε ότι: $\text{εφ}\omega = \frac{(A\Gamma - A\Delta) \cdot AB}{AB^2 + A\Gamma \cdot A\Delta}$.

28. Αν για τις οξείες γωνίες α, β ισχύει ότι $\text{εφ}\alpha = \frac{1}{2}$ και $\text{εφ}\beta = \frac{1}{3}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε το $\text{εφ}(\alpha - \beta)$.

β) Να δείξετε ότι $\text{εφ}(\alpha + \beta) = 1$.

γ) Να δείξετε ότι οι γωνίες $2\alpha, 2\beta$ είναι συμπληρωματικές. (Πανελλήνιες Εξετάσεις)

ΤΕΣΤ 1°**ΘΕΜΑ1°:** Α. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

i) $\eta\mu(\alpha + \beta) =$

ii) $\epsilon\phi(\alpha - \beta) =$

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Ισχύει: $\sigma\upsilon\nu 18^\circ \sigma\upsilon\nu 63^\circ + \eta\mu 18^\circ \eta\mu 63^\circ = \sqrt{2}$. Σ Λ

ii) Αν $\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma - \eta\mu\beta\eta\mu\gamma = 0$, τότε ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Σ Λ

iii) $\eta\mu(x + 20^\circ)\sigma\upsilon\nu(110^\circ + x) - \eta\mu(110^\circ + x)\sigma\upsilon\nu(20^\circ + x) = -1$. Σ Λ

iv) Αν $x, y \in (60^\circ, 80^\circ)$, τότε $\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y - \eta\mu x \cdot \eta\mu y > 0$. Σ Λ

ΘΕΜΑ2°: α) Να δείξετε ότι: $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$.β) Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3\eta\mu x$ **ΤΕΣΤ 2°****ΘΕΜΑ1°:** Α. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

i) $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) =$

ii) $\sigma\phi(\alpha - \beta) =$

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Αν ισχύει $90^\circ < x < y < 180^\circ$, τότε: $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu y - \sigma\upsilon\nu x \eta\mu y > 0$. Σ Λ

ii) Ισχύει: $\epsilon\phi 20^\circ + \epsilon\phi 25^\circ = 1 - \epsilon\phi 20^\circ \epsilon\phi 25^\circ$ Σ Λ

iii) Ισχύει: $\frac{\sigma\phi 10^\circ \epsilon\phi 40^\circ - 1}{\sigma\phi 50^\circ + \sigma\phi 10^\circ} = \sqrt{3}$ Σ Λ

iv) Ισχύει: $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta$ Σ Λ

ΘΕΜΑ2°: Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $(\epsilon\phi\beta + 1)(\epsilon\phi\gamma + 1) = 2\epsilon\phi\beta \cdot \epsilon\phi\gamma$, ($\beta, \gamma \neq 45^\circ$), να δείξετε ότι: $A = 45^\circ$.**ΘΕΜΑ 3°:** Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha} = 0$