4.2 Διαίρεση Πολυωνύμων

ΘΕΩΡΙΑ

- **Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαίρεσης**

$\Delta = \delta\pi + \upsilon$, $0 \le \upsilon < \delta$, Δ διαιρετέος και δ διαιρέτης, π πηλίκο, υ υπόλοιπο.

- **Θεώρημα**

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x) με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και υ(x) τέτοια, ώστε: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$, όπου το υ(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).
- Δ(x) διαιρετέος, δ(x) διαιρέτης, π(x) πηλίκο και υ(x) υπόλοιπο της διαίρεσης.

- **Θεώρημα**

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$, δηλαδή $\upsilon = P(\rho)$.

- **Θεώρημα**

Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x - \rho$, αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

- Η διαίρεση Δ(x) : δ(x) λέγεται τέλεια αν $\upsilon(x) = 0$.

Στην περίπτωση αυτή η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x)$ και το δ(x) είναι παράγοντας του Δ(x).

Οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

- το δ(x) είναι παράγοντας του Δ(x) • το δ(x) διαιρεί το Δ(x) • υπάρχει π(x) ώστε: $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x)$ • το δ(x) είναι διαιρέτης του Δ(x)

- Αν το πολυώνυμο P(x) έχει μορφή $P(x) = a_\nu x^\nu + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_\nu \neq 0)$, τότε:
  - P(x) έχει το πολύ ν ρίζες
  - Αν $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ οι ρίζες της $P(x) = 0$, τότε $P(x) = a_\nu (x - \rho_1)(x - \rho_2)\cdots(x - \rho_\nu)$

- Όταν «λείπουν» κάποιοι όροι από τον Διαιρετέο Δ(x), (δηλαδή, κάποιες δυνάμεις του x), τότε είναι προτιμότερο να τους συμπληρώνουμε με μηδενικούς.

- Όταν ο διαιρέτης είναι $x - \rho$ (1ου βαθμού), τότε το υπόλοιπο θα είναι ένα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού ή το μηδενικό πολυώνυμο, δηλαδή ένας πραγματικός αριθμός.

- Ο βαθμός του πηλίκου ισούται με τη διαφορά των βαθμών του διαιρετέου και του διαιρέτη.

- Το σχήμα Horner χρησιμεύει:
  - για την εύρεση του πηλίκου και του υπόλοιπου με διαιρέτη μορφής $x - \rho$
  - για την εύρεση της τιμής $P(\rho)$
  - για τη λύση πολυωνυμικών εξισώσεων
- Αν $x - \rho$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$, τότε $P(\rho) \neq 0$.
- Αν $P(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει παράγοντες μορφής $x - \rho$.
- Αν $(x - \rho)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$, τότε $P(\rho) = 0$ και $\pi(\rho) = 0$, όπου $\pi(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x - \rho)$.
- Αν $\delta(x)$ έχει ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\kappa$, τότε $P(\rho_1) = \upsilon(\rho_1), \ldots, P(\rho_\kappa) = \upsilon(\rho_\kappa)$.
- Αν βαθμός $P(x)$ < βαθμού $Q(x)$ και $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)$, τότε $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\alpha}{x - x_1} + \dfrac{\beta}{x - x_2}$ με α, β πραγματικούς αριθμούς.
- Αν ο βαθμός του διαιρέτη είναι 1, τότε το υπόλοιπο είναι μορφής $\upsilon = \alpha$.
- Αν ο βαθμός του διαιρέτη είναι 2, τότε το υπόλοιπο είναι μορφής $\upsilon = \alpha x + \beta$.
- Αν ο βαθμός του διαιρέτη είναι 3, τότε το υπόλοιπο είναι μορφής $\upsilon = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
- Αν ο βαθμός του διαιρέτη είναι κ, τότε το υπόλοιπο είναι μορφής $\upsilon = \alpha x^{\kappa-1} + \ldots + \beta x + \gamma$.
- Κάθε σταθερό πολυώνυμο διαιρεί ακριβώς κάθε πολυώνυμο $\Delta(x)$.
- Αν $x - \alpha$, $x - \beta$ είναι παράγοντες του $P(x)$, τότε $(x - \alpha)(x - \beta)$ είναι επίσης παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Αν τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ έχουν βαθμούς 6 και 2 αντίστοιχα, τότε το πηλίκο $P(x) : Q(x)$ είναι:

α) δευτέρου βαθμού β) τρίτου βαθμού γ) τετάρτου βαθμού δ) ογδόου βαθμού

ii) Η διαίρεση $(x^3 + x - 1) : (x - 1)$ δίνει υπόλοιπο:

α) 0 β) 3 γ) 2 δ) 1

iii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ με το $x - 2$ είναι:

α) 1 β) 0 γ) 3 δ) -1

iv) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με $x^2 - 9$ είναι $2x + 1$, τότε το υπόλοιπο του P(x) με διαιρέτη $x + 3$ είναι:

α) -3 β) 0 γ) 5 δ) -5

v) Το πολυώνυμο $P(x) = x^6 + αx^2 + βx + γ$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε παράγοντες το πολύ πρώτου βαθμού:

α) 4 παράγοντες β) 2 παράγοντες γ) 3 παράγοντες δ) 6 παράγοντες

vi) Ο αριθμός $5^{11} - 1$ διαιρείται ακριβώς με το:

α) 7 β) 5 γ) 4 δ) 10

vii) Στη διαίρεση $P(x) : (x^3 - 4x + 1)$ το υπόλοιπο είναι βαθμού:

α) τρίτου βαθμού β) πρώτου βαθμού γ) μικρότερο ή ίσο του 2 δ) μηδενικού βαθμού

viii) Αν δ(x) είναι τετάρτου βαθμού, π(x) είναι τρίτου βαθμού και υ(x) δευτέρου βαθμού, τότε ο διαιρετέος είναι:

α) έβδομου βαθμού β) δωδέκατου βαθμού γ) πρώτου βαθμού δ) έκτου βαθμού

ix) Αν η διαίρεση $(x^3 - 6x^2 + κx + 6) : (x - 1)$ είναι τέλεια, τότε το κ ισούται με:

α) 2 β) 3 γ) -1 δ) 0

x) Αν $δ(x) = x^2 + 1$, $π(x) = x - 1$ και $υ(x) = 2x - 1$, τότε ο διαιρετέος έχει μορφή:

α) $x^3 + x^2 + 3x + 2$ β) $x^3 - x^2 + 3x - 2$ γ) $x^4 + 1$ δ) $x^3 - x^2 + x - 2$

xi) Αν το $x + 2$ διαιρεί τα πολυώνυμα P(x), Q(x), τότε θα διαιρεί και το πολυώνυμο:

α) $P(x)Q(x) - 2$ β) $P^2(x) + Q^2(x) + 4$ γ) $2P(x) + 5Q(x)$ δ) $P(x) + Q(x) + 4$

xii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^{2015} + x + 1) : (x + 1)$ ισούται με:

α) 2 β) -1 γ) 0 δ) 3

xiii) Αν $P(x) = x^3 + x - 25$ και $P(x) = π(x)(x - 3) + κ$, τότε:

α) $κ = 25$ β) $x - 3$ παράγοντας του P(x)

γ) x παράγοντας του P(x) δ) $κ = 5$

xiv) Αν Q(x) διαιρεί P(x), από τις παρακάτω διαιρέσεις τέλεια είναι:

α) $(P^2(x) + 4) : Q(x)$ β) $(P^2(x)) : Q(x)$

γ) $(3P(x) - 6) : Q(x)$ δ) $[P^2(x) + 2P(x) + 1] : Q(x)$

xv) Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, διαιρείται με το πολυώνυμο:

α) $x - y$ β) $(x + y)^4$ γ) $x + y$ δ) $x^2 + y^2$

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Για κάθε ζεύγος Δ(x), δ(x) υπάρχουν μοναδικά π(x), υ(x) ώστε: Σ ☐ Λ ☐

Δ(x) = δ(x)π(x) + υ(x), με βαθμό του υ(x) < βαθμού του δ(x).

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με x - ρ ισούται με την τιμή P(ρ). Σ ☐ Λ ☐

iii) Αν P(x) ≠ 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε το P(x) δεν έχει παράγοντα μορφής x - ρ. Σ ☐ Λ ☐

iv) Αν x - ρ διαιρεί το πολυώνυμο P(x), τότε P(ρ)=0. Σ ☐ Λ ☐

v) Αν ο διαιρέτης είναι δεύτερου βαθμού, τότε το υπόλοιπο έχει μορφή αx+β. Σ ☐ Λ ☐

vi) Για x ≠ 1, ισχύει: $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x - 1$. Σ ☐ Λ ☐

vii) Ισχύει: $1 + 2^2 + \ldots + 2^9 = 1022$. Σ ☐ Λ ☐

viii) Το πολυώνυμο $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του P(x), αν x =1 είναι ρίζα του πολυωνυμου P(x). Σ ☐ Λ ☐

ix) Το μηδενικό πολυώνυμο δεν διαιρεί κανένα μη μηδενικό πολυώνυμο. Σ ☐ Λ ☐

x) Το σχήμα Horner εφαρμόζεται πάντα σε διαιρέσεις, όπου ο διαιρέτης είναι της μορφής $αx^2 + βx + γ$. Σ ☐ Λ ☐

xi) Αν x + 2 παράγοντας του $x^ν + 2^ν$, τότε ν είναι άρτιος. Σ ☐ Λ ☐

xii) Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + x^2 + 4$ έχει παράγοντα μορφής x - ρ. Σ ☐ Λ ☐

xiii) Αν x - ρ παράγοντας του P(x), τότε $(x - ρ)^2$ παράγοντας του $P^2(x)$. Σ ☐ Λ ☐

xiv) Δύο πολυώνυμα P(x), Q(x) είναι ίσα, αν έχουν κοινούς παράγοντες. Σ ☐ Λ ☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α ομάδα

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης.

α) $(x^3 + x^2 + 2x - 16) : (x - 2)$ β) $(x^5 + x^2 + x + 1) : (x + 1)$

γ) $(x^4 + x^3 + 3x + 1) : (x^2 + 1)$ δ) $(x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 4) : (x^2 + x + 1)$

2. Να γίνουν οι διαιρέσεις και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης.

α) $(x^3 + x^2 + x + 4) : (x + α)$ β) $(x^3 + αx^2 + 2αx + 1) : (x - 2α)$

3. Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων χωρίς να γίνουν οι διαιρέσεις.

α) $(x^{25} + x^2 - 6x + 4) : (x + 1)$ β) $(x^3 - αx^2 + 2αx + 1) : (x - α)$

4. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α) $(x^3 + x^2 - 6x - 7) : (x + 2)$ β) $(x^4 - x^2 + 5x + 1) : (x - 3)$

γ) $(x^3 + αx + α) : (x + α)$ δ) $(x^4 - 4) : (x + 1)$

5. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$

α) Να βρείτε την τιμή του πολυωνύμου για $x = 3$.

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 3$.

γ) Να γράψετε την ταυτότητα διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 3$. (Πανελλήνιες Εξετάσεις)

6. Να εξετάσετε αν τα πολυώνυμα $x - 2$, $x + 1$ είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x) = x^3 + 6x^2 + 4x - 1$.

7. Να δείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής $x - ρ$.

α) $P(x) = x^4 + 2x^2 + 6$ β) $Q(x) = - x^4 - 6x^2 - 8$

8. Δίνεται το πολυώνυμο της μορφής $P(x) = αx^3 + βx^2 - 2x + 4$. Να βρείτε τους $α, β \in \mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση με το $x + 1$ να αφήνει υπόλοιπο 4, ενώ η διαίρεση με το $x - 1$ να αφήνει υπόλοιπο -2.

9. Να βρείτε τον αριθμό $λ \in \mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + λ^2x^2 + λx - 1$ να διαιρείται με το $x + 1$.

10. Να βρείτε τις τιμές των $κ, λ \in \mathbb{R}$, ώστε το πολυωνυμο $P(x) = x^3 - λx^2 + κx - 10$ να έχει παράγοντα $(x - 1)(x - 2)$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$, να αποδείξετε ότι μπορεί να γραφεί στη μορφή $P(x) = (x^2 - 3x + 2)Π(x)$ και να προσδιοριστεί το $Π(x)$.

12. Αν το υπόλοιπο των διαιρέσεων με $x - 2$, $x - 3$ του $P(x)$ είναι 3 και 4 αντίστοιχα, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 5x + 6)$.

13. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x^2 + 3x + 2$ είναι $3x - 2$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$.

14. Να βρείτε τα $κ, λ \in \mathbb{R}$, ώστε, αν το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + κx^3 + λx^2 - 6x - 3$ διαιρεθεί με $x^2 - 4$, να δίνει υπόλοιπο $2x + 1$.

15. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + κx^2 + λx + κλ$, $(κ, λ \neq 0)$ έχει παράγοντες τους $x - κ$ και $x - λ$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ.

Β ομάδα

16. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 3x^3 - 4x$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του πολυωνύμου $Q(x) = x^3 - 4x$.

17. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ ∈ ℝ, ώστε το πολυωνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 4$ να έχει παράγοντα τον $(x + 1)^2$.

18. Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4x + 3}$ στη μορφή $f(x) = \dfrac{A}{x - 1} + \dfrac{B}{x - 3}$

19. Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ στη μορφή $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta}{x^2 - 4}$

20. Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x^2}{x^2 - 1}$ στη μορφή $f(x) = \kappa x + \lambda + \dfrac{\mu x + \nu}{x^2 - 1}$

21. Να βρείτε τους αριθμούς α, β ∈ ℝ, ώστε το πολυώνυμο: $P(x) = x^3 + x^2 + 4x - 6$ να διαιρείται με το $Q(x) = x^2 + \alpha x + \beta$.

22. Να βρείτε τα κ, λ ώστε η διαίρεση $(x^3 + \kappa^2 x^2 + \lambda^2 x + 2\kappa + 2\lambda + 1) : (x - 1)$ να είναι τέλεια.

23. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x + 2$, να δείξετε ότι πολυώνυμο $Q(x) = P(x^2 + 2x - 5)$, έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x + 3$.

24. Δίνεται το πολυώνυμο P(x), για το οποίο ισχύει η σχέση $P(2 - x) + 2P(x) = x^2 + 2x + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές P(2), P(0)

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 2x)$

25. Δίνεται πολυώνυμο P(x). Να αποδείξετε ότι οι διαιρέσεις $P(x) : (x+3)$ και $P(4x + 1) : (x + 1)$, δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.

26. Αν $P(x) = x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + \mu$ έχει παράγοντα $(x - 2)^2$, να δείξετε ότι: $4\kappa - \mu = -16$ και $\lambda + \mu = 4$.

27. Αν για το πολυώνυμο P(x) ισχύει $P(0) = 4$ και $P(1) = P(-1) = 0$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με διαιρέτη $\delta(x) = x^3 - x$.

28. Να βρείτε τους αριθμούς κ, λ, ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x + \lambda$ να έχει παράγοντα το $x^2 + 2$.

29. Να βρείτε τις τιμές του κ ∈ ℝ, ώστε το πολυώνυμο $x - \kappa^2$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x) = x^2 - 2x - 8$.

30. Να βρείτε την τιμή του κ ∈ ℕ, ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^{2\kappa} - 3x^{\kappa} - 40$ να έχει παράγοντα τον $x - 2$.

ΤΕΣΤ 1ο

ΘΕΜΑ 1ο: Α. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με $υ = P(\rho)$.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Αν $P(x) = (x - \rho)^5\, \Pi(x)$, τότε ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$. Σ ☐ Λ ☐

ii) Αν ο διαιρέτης $\delta(x) = x^2 + 5$, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : \delta(x)$ έχει μορφή $x + \beta$. Σ ☐ Λ ☐

iii) Αν $\delta(x)$ διαιρεί το πολυώνυμο $P(x)$, τότε θα διαιρεί και το $P^3(x) + P(x)$. Σ ☐ Λ ☐

iv) Το πολυώνυμο $P(x) = x^\nu + \alpha^\nu$, έχει ρίζα $x = -\alpha$. Σ ☐ Λ ☐

v) Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^\nu + \alpha^\nu$ έχει παράγοντα $x - \rho$, τότε ο αριθμός ν είναι περιττός. Σ ☐ Λ ☐

ΘΕΜΑ 2ο: Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν το $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x - 1)^2$.

ΤΕΣΤ 2ο

ΘΕΜΑ 1ο: Α. Να δείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$, αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Αν όλοι οι παράγοντες του $Q(x)$ είναι παράγοντες του $P(x)$, τότε τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$ έχουν ίδιες ακριβώς ρίζες. Σ ☐ Λ ☐

ii) Αν τα $P(x)$, $\delta(x)$ έχουν ίδιο βαθμό, τότε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : \delta(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο. Σ ☐ Λ ☐

iii) Αν $x - \rho$ παράγοντας των $P(x)$, $Q(x)$, τότε $x - \rho$ παράγοντας του $\kappa P(x) + \lambda Q(x)$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Σ ☐ Λ ☐

iv) Αν $x - \alpha$, $x - \beta$ παράγοντας του $P(x)$, τότε $\pi_1(\beta) = \pi_2(\alpha)$, όπου $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$ πηλίκα του $P(x)$ με $x - \alpha$, $x - \beta$ αντίστοιχα. Σ ☐ Λ ☐

v) Κάθε πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων της μορφής $x - \rho$. Σ ☐ Λ ☐

ΘΕΜΑ 2ο: Αν $P(0) = 1$ και $P(2) = 3$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 2x)$.