4.4 Εξισώσεις και Ανισώσεις που ανάγονται σε Πολυωνυμικές

ΘΕΩΡΙΑ

● **Ρητές εξισώσεις**

Είναι οι εξισώσεις στις οποίες ένας όρος τουλάχιστον είναι ρητή παράσταση του x.

● **Άρρητες εξισώσεις**

Είναι οι εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται ο άγνωστος x κάτω από το ριζικό.

● **Τριγωνομετρικές εξισώσεις**

Λέγονται οι εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται ως άγνωστος το ημx ή συνx ή εφx ή σφx.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

● Για τη λύση των **ρητών εξισώσεων** ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Θέτουμε περιορισμούς για τις παραστάσεις που βρίσκονται στους παρονομαστές (να είναι διάφοροι του μηδενός).
- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση.
- Ελέγχουμε ποιες από τις ρίζες που βρήκαμε ικανοποιούν τους αρχικούς περιορισμούς.

● Για τη λύση των **άρρητων εξισώσεων** ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Θέτουμε περιορισμούς για τις παραστάσεις που βρίσκονται κάτω από το ριζικό (να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός).
- Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης σε κατάλληλη δύναμη, με στόχο να διώξουμε τα ριζικά και να καταλήξουμε σε πολυωνυμική εξίσωση.
- Λύνουμε την πολυωνυμική εξίσωση και ελέγχουμε αν οι ρίζες ικανοποιούν τους περιορισμούς αλλά και αν επαληθεύουν την αρχική εξίσωση.

● Για τη λύση **τριγωνομετρικών εξισώσεων**, των οποίων η μορφή αντιστοιχεί σε πολυωνυμικές εξισώσεις, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

- Θέτουμε τον άγνωστο τριγωνομετρικό αριθμό ίσο με μια νέα μεταβλητή ω.
- Αν έχουμε ημx, συνx, πρέπει $-1 \leq ω \leq 1$ (ω = ημx ή συνx).
- Αν έχουμε εφx, σφx, πρέπει συνx ≠ 0, ημx ≠ 0 (αντίστοιχα).
- Λύνουμε την αντίστοιχη πολυωνυμική εξίσωση.

- Εξετάζουμε αν οι λύσεις μας είναι δεκτές ή απορρίπτονται.
- Ανάλογα των τιμών του ω, λύνουμε τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές εξισώσεις (ημx = ω...).

- Σε εξισώσεις της μορφής $\sqrt[κ]{P(x)} = Q(x)$ λαμβάνουμε τον περιορισμό $Q(x) \geq 0$.
- Σε άρρητες εξισώσεις συνήθως απομονώνουμε το ριζικό στο ένα μέλος και υψώνουμε και τα δύο μέλη στην κατάλληλη δύναμη.
- Αν α > β και α, β ετερόσημοι, δεν επιτρέπεται να υψώσουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο. Διακρίνουμε περιπτώσεις για το β, (β > 0, β < 0).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i) Η εξίσωση $\sqrt{x-2} = x + κ$, $κ \in \mathbb{R}^*$ αποκλείεται να έχει ρίζα τον αριθμό:

α) 1 β) 5 γ) 7 δ) 8

ii) Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{x-4} + \sqrt{λ-x} = 12$, $λ \in \mathbb{Z}$. Ο αριθμός λ αποκλείεται να πάρει την τιμή:

α) 3 β) 10 γ) 5 δ) 6

iii) Η εξίσωση $\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x} = 5$ έχει λύσεις όταν:

α) $x \geq 4$ β) $x \leq 8$ γ) $4 \leq x \leq 8$ δ) $x \in \mathbb{R}$

iv) Η ανίσωση $\sqrt{x-5} \geq -1$, έχει λύσεις όταν:

α) $x \geq 5$ β) $x \geq 0$ γ) $x \in \mathbb{R}$ δ) $x = 5$

v) Για την λύση της $\sqrt{x-2} = \sqrt{x} - 3$ υψώνουμε στο τετράγωνο:

α) μία φορά β) δύο φορές γ) τρεις φορές δ) τέσσερεις φορές

vi) Για τη λύση της εξίσωσης $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$ θέτουμε όπου ω:

α) $ω = x^2$ β) $ω = x^{\frac{1}{3}}$ γ) $ω = x^3$ δ) $ω = x^{\frac{1}{2}}$

vii) Οι λύσεις της $x^2 = \sqrt{x}$ ειναι:

α) $x = 1$ β) $x = -1$ ή $x = 1$ γ) $x = 0$ ή $x = 1$ δ) $x = 0$

viii) Λύση της $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} = 0$ είναι ο αριθμός:

α) 4 β) 1 γ) 2 δ) 0

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Η εξίσωση $\sqrt[4]{x+5} = -2$ έχει λύση. Σ ☐ Λ ☐

ii) Η εξίσωση $\sqrt{x+2} + 4 = -\sqrt{x-8}$ έχει λύση. Σ ☐ Λ ☐

iii) Η εξίσωση $x^{-2} + x^{-3} + x + 7 = 0$ είναι άρρητη. Σ ☐ Λ ☐

iv) Όταν υψώνουμε και τα δύο μέλη μιας εξίσωσης στο τετράγωνο, προκύπτει ισοδύναμη εξίσωση. Σ ☐ Λ ☐

v) Η εξίσωση $ημ^4x + συνx^4 + συνx - 1 = 0$ ανάγεται σε πολυωνυμική. Σ ☐ Λ ☐

vi) Η ανίσωση $\sqrt{x-1} \geq -3$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Σ ☐ Λ ☐

vii) Η εξίσωση $\sqrt{x^2+1} = -4$ είναι αδύνατη. Σ ☐ Λ ☐

viii) Για τη λύση της εξίσωσης: $\sqrt[3]{x-1} - 2\sqrt{x-1} - 4 = 0$, θέτω $\sqrt[6]{x-1} = ω$. Σ ☐ Λ ☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

Α ομάδα

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^8 + 15x^4 - 16 = 0$

β) $(x-3)^4 - 4(x-3)^2 + 3 = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6 - 4x^2 + 3 = 0$

β) $1 - 4συν^4x = 3(1 - 2συν^2x)$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-4} = 2$

β) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $8ημ^3x + 8ημx - 5 = 0$

β) $2συν^3x + ημ^2x + 4συνx - 3 = 0$

γ) $4ημ^3x + συν2x - 1 = 0$

δ) $συν^4x + συν2x - 2 = 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-5}$

β) $\sqrt{x^2+3x+12} + \sqrt{x^2+3x+5} = 7$

γ) $\sqrt{x^2+5x+10} = x+4$

δ) $x\sqrt{x+5} = (x+5)\sqrt{x}$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 2 = 0$

β) $\sqrt[4]{x-9} = \sqrt{x} - 3$

γ) $x + \sqrt{x+6} = 6$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^3 - 7x + 6 > 0$ β) $x^4 - 6x^2 + 8 > 0$

γ) $x^3 + x^2 - 4x - 4 \leq 0$ δ) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 \geq 0$

10. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\sqrt{x+2} > x$ β) $x - 1 < \sqrt{x^2 - 4x + 7}$

γ) $\sqrt{x+1} < \sqrt{x+2} - 1$ δ) $\sqrt{x - \sqrt{x-1}} > 1$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\dfrac{x^3 + 4x - 1}{x + 3} < 1$ β) $\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1} \geq \dfrac{4}{x-1}$

γ) $\dfrac{x+2}{x+1} + \dfrac{3}{x^2-1} > \dfrac{x}{x-1}$ δ) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{x+1} \geq \dfrac{3}{x^2 + 3x + 2}$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{3x}{x-1} + \dfrac{1}{x^2-1} = -\dfrac{13}{3}$ β) $\dfrac{x^3 + x + 2}{x+1} = x + 1$

γ) $\dfrac{x^2}{(x+2)(3x+4)} = \dfrac{x}{(x-3)(3x+4)} - \dfrac{x}{(x-3)(x+2)}$ δ) $3εφ^2x + 3 = \dfrac{16\,εφ^2x}{1 + εφ^2x}$

Β ομάδα

13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt[3]{-x^2 + 6x - 8} = x - 2$ β) $\sqrt{x + \sqrt{x+2}} = 2$

γ) $\sqrt[3]{x(x+2)} = x + 2$ δ) $\sqrt{x + \sqrt{x+13}} = \sqrt{10 - x}$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{-x-1} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 - x}}$ β) $\dfrac{4 - \sqrt{x}}{2} = \dfrac{\sqrt{4x - 31}}{4 + \sqrt{x}}$

γ) $x + \sqrt{x^2 - x + \lambda^2 + 1} = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ δ) $x^2 + x - \sqrt{x^2 + x + 12} = 0$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2 - 2x)^3 - 7(x^2 - 2x + 5) + 29 = 0$ β) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 24$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{x} - \dfrac{6}{\sqrt{x}-1} = 2$ β) $\sqrt{x-\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x-1}} = 3$

γ) $\sqrt{x^2+6x+7} = x - λ,\ λ \in \mathbb{R}$ δ) $\sqrt{ημ^2x+3} = \sqrt{συν^2x+1} + 1$

17. Αν οι πλευρές ενός ορθογωνίου διαφέρουν κατά 1 και η διαγώνιος ισούται με τη μεγαλύτερη από αυτές αυξημένη κατά 1, να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 - \dfrac{1}{x^3} - 6\left(x - \dfrac{1}{x}\right) + 2 = 0$ β) $(x - 1)^4 = 2(x^2 - 1)$

19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2συνx + \sqrt[3]{συνx} = 3$ β) $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = \dfrac{19}{\sqrt{x+5}}$

20. Να λύσετε την εξίσωση:

$\sqrt{x-2} + \sqrt[4]{x^2-3x+2} + \sqrt[6]{3x-6} = 0$

21. Να λύσετε την εξίσωση:

$x^2 + x + 10 + \sqrt{x^2+x+12} = 18$

22. Να λύσετε την ανίσωση:

$\sqrt{5x+2\sqrt{3x+3}} > 2$

23. Να βρείτε την τιμή του $ω \in (0,π)$, ώστε το $x - 1$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$P(x) = x^4 - (συν^2ω)x^3 + 2(ημω)x^2 + x - 4.$

24. Να λυθεί η εξίσωση: $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$

25. Να λυθεί η ανίσωση: $\sqrt{4-\sqrt{2+x}} \geq \sqrt{2-x}$

26. Το κόστος ημερήσιας παραγωγής x προϊόντων μιας επιχείρησης δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = 37x + 30$ (δεκάδες Ευρώ), ενώ οι εισπράξεις δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = x^3 - 6x^2$ (δεκάδες Ευρώ). Να βρείτε πόσες τουλάχιστον μονάδες προϊόντων πρέπει να παράγονται ημερησίως, για να υπάρχει κέρδος στην επιχείρηση.

ΤΕΣΤ 1ο

ΘΕΜΑ 1ο: Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Η εξίσωση $x^3 - \sqrt{2}x + 12 = 0$ είναι άρρητη. Σ ☐ Λ ☐

ii) Η εξίσωση $\sqrt{x-2} + \lambda^2 + 2 = x^2 - 4$ έχει λύση τη $x = 2$. Σ ☐ Λ ☐

iii) Η ανίσωση $x^4 + 4x^2 + 3 > 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Σ ☐ Λ ☐

iv) Η εξίσωση $ημ^3x + 2ημx + 4 = 0$ έχει λύσεις. Σ ☐ Λ ☐

v) Η εξίσωση $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$ είναι αντίστροφη. Σ ☐ Λ ☐

ΘΕΜΑ 2ο: Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x^2 + 2x)^3 - 4(x^2 + 2x)^2 + 3(x^2 + 2x) = 0$$

ΘΕΜΑ 3ο: Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x + 1} = 1$

ΤΕΣΤ 2ο

ΘΕΜΑ 1ο: Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x + 2)^8 - 15(x + 2)^4 - 16 = 0$$

ΘΕΜΑ 2ο: Να λύσετε την εξίσωση:

$$2συν^4x - 5συν^3x + 5συνx - 2 = 0$$

ΘΕΜΑ 3ο: Να λύσετε την ανίσωση:

$$3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ☹

1. Έστω P(x) πολυώνυμο 3ου βαθμού το οποίο διαιρείται με το x^2+1, έχει ρίζα το 0 και το άθροισμα των συντελεστών του είναι ίσο με 2.

α) Να αποδείξετε ότι: $P(x) = x^3 + x$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $[P(x) - 2]^3 + [P(x) - 2]^2 + P(x) > 2$. (Πανελλήνιες Εξετάσεις)

2. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5α - 1)x^2 + 8x - 3α - 6$, με $α \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x^2 - 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β) Να βρείτε τη τιμή του α, ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

γ) Για α = 3, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης P(x) = 0, καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x′x. (Πανελλήνιες Εξετάσεις)

3. Δίνεται πολυώνυμο P(x) 3ου βαθμού με ρητούς συντελεστές και με ρίζα τον αριθμό $3 - \sqrt{2}$. Να δείξετε ότι έχει ρίζα και τον αριθμό $3 + \sqrt{2}$.

4. Να βρεθούν οι τιμές του α, ώστε τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 + (\sqrt{2}\,ημα + 2)x^2 + 4x - 2$ και $Q(x) = x^3 + x^2 + (εφα + 5)x - 2$ να είναι ίσα.

5. Δίνεται πολυώνυμο $P(x) = x^3 + αx^2 + βx + γ$ με ρίζες $ρ_1$, $ρ_2$, $ρ_3$. Να δείξετε ότι: $ρ_1 + ρ_2 + ρ_3 = -α$ και $ρ_1 \cdot ρ_2 \cdot ρ_3 = -γ$.

6. Αν x - α, x - β (α ≠ β) είναι παράγοντες του πολυωνύμου P(x), να δείξετε ότι η διαίρεση του P(x) με το πολυώνυμο (x - α)(x - β) είναι τέλεια.

7. Τρεις πελάτες βρίσκονται ταυτόχρονα σ′ ένα γραφείο ενοικιάσεων αυτοκινήτων. Ο πρώτος επιλέγει ένα αυτοκίνητο, ο δεύτερος ένα διαφορετικό από τον προηγούμενο και ο τρίτος διαφορετικό από τους άλλους δύο. Αν οι διαφορετικές επιλογές τους είναι 60, να βρείτε τον αριθμό των αυτοκινήτων που ήταν διαθέσιμα προς ενοικίαση.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2 - 2x)^{10} = -x^4 + 7x^2 + 4x - 20$ β) $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$

γ) $x^3 + λx^2 - λx - 1 = 0$, $λ \in \mathbb{R}$ δ) $\sqrt[3]{x^2 - 1} = \sqrt{x + 1}$

9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{20} - 10x^{19} + 10x^{18} - \ldots - 10x + 1$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x - 9.

10. Δίνεται το πολυώνυμο P(x) με παράγοντες $x - 2$ και $x - 3$. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = P[P(x + 1) + 3] + 6P^2(4x - 1) + 5$, αν διαιρεθεί με $x - 1$, δίνει υπόλοιπο 5.

11. Δίνεται το πολυώνυμα $P(x) = x^3 + αx^2 + βx + γ$ με ακέραιους συντελεστές. Να βρείτε τους α, β, γ, αν το P(x) έχει ρίζες τρεις διαδοχικούς ακέραιους και το άθροισμα των συντελεστών του ισούται με - 6.

12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^4 + (λ - 2)x^2 + λ +1$, να βρείτε τις τιμές του $λ \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της f να τέμνει τον άξονα x′x σε τέσσερα διαφορετικά σημεία.

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^2 + 5x - 2\sqrt{x^2 + 5x + 13} > -10$ β) $\left(\frac{x^3}{2-x}\right)^3 + \left(\frac{x^3}{2-x}\right)^2 - \left(\frac{x^3}{2-x}\right) - 1 > 0$

14. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x + 1$ είναι παράγοντας του f(x) και να βρείτε το πηλίκο π(x) της διαίρεσης του f(x) με το $x + 1$.

β) Να αποδείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του π(x) και να βρείτε το πηλίκο π(x) της διαίρεσης του π(x) με το $x - 2$.

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x. (Πανελλήνιες Εξετάσεις)

15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + αx^2 + βx + 12$, με $α, β, γ \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα α, β, αν ισχύει: $P(x + 2) - P(x) = 6x(x + 2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την τιμή του αθροίσματος: $S_ν = 6{\cdot}3 + 12{\cdot}4 + 18{\cdot}5+\ldots+ 6ν(ν + 2)$

16. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + κ$ με $κ \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του κ, ώστε το P(x) να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P[P(x)] + 4 + κ$.

17. Δίνεται πολυώνυμο P(x) με ρίζες τρεις διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς και ακέραιους συντελεστές . Να δείξετε ότι ο αριθμός P(κ) είναι άρτιος για κάθε $κ \in \mathbb{Z}$.

18. Δίνεται το πολυώνυμο P(x), για το οποίο ισχύει: $(x + 2)P(x - 1) + (3x + 1)P(2 - x) = x^3 + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές P(1) και P(0).

19. Δίνεται το πολυώνυμο P(x), για το οποίο ισχύει η ισότητα: $P(x + 2) - P(x + 1) = x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου P(x) είναι 8, να βρείτε την τιμή P(5). ☺

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ 1ο:

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

i) Ο σταθερός όρος ενός πολυωνύμου P(x) είναι πάντα ίσος με P(0). Σ ☐ Λ ☐

ii) Το άθροισμα των συντελεστών ενός πολυωνύμου P(x) είναι πάντα ίσο με P(1). Σ ☐ Λ ☐

iii) Αν ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης: $\sqrt{3-x} = x^2 + x + 5$, τότε $\rho \in (-\infty, 3]$. Σ ☐ Λ ☐

iv) Η εξίσωση $x^3 + \kappa x^2 - 3x + 4 = 0$ αποκλείεται να έχει ρίζα το -2, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Σ ☐ Λ ☐

v) Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + \kappa x + 2$, $\kappa \in Z$, έχει παράγοντα το $x - 3$. Σ ☐ Λ ☐

Β. Τι λέγεται σταθερό πολυώνυμο;

ΘΕΜΑ 2ο: Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$, με ρίζες -1 και 2.

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β.

β) Να βρείτε την τρίτη ρίζα.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

ΘΕΜΑ 3ο: Να λυθεί η εξίσωση:

α) $x^3 + \frac{1}{x^3} = x + \frac{1}{x}$ (1)

β) αν α είναι η μεγαλύτερη ρίζα της (1), να βρείτε (χωρίς να λυθεί) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $x^4 - (3\alpha + 1)x^2 + \alpha - 3 = 0$

ΘΕΜΑ 4ο: Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 3x^3 - 7x^2 - 7x + 3$

α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x′x.