

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

5.1 Εκθετική Συνάρτηση

ΘΕΩΡΙΑ

● Ιδιότητες δυνάμεων με εκθέτες πραγματικούς αριθμούς

• $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$

• $a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1-x_2}$

• $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$

• $(a\beta)^x = a^x \beta^x$

• $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$

Επίσης ισχύουν: • $a^0 = 1, (a \neq 0)$

• $0^x = 0, (x > 0)$

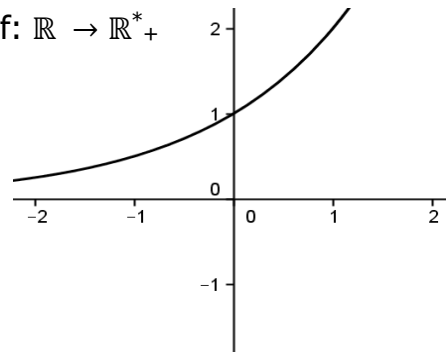
• $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu} = \alpha^{\frac{\nu}{\mu}}, \nu \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{N}^*$

● Εκθετική συνάρτηση

Ορίζουμε εκθετική συνάρτηση με βάση a , αυτή που αντιστοιχίζει κάθε $x \in \mathbb{R}$ στη δύναμη a^x , με $0 < a, a \neq 1$. Συμβολίζουμε $f(x) = a^x$, όπου $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*_+$

● Συνάρτηση $f(x) = a^x, a > 1$

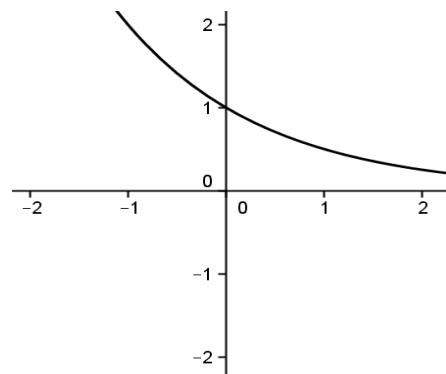
- έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .
- έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$.
Δηλαδή $a^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



- είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον $y'g$ στο σημείο $A(0,1)$.
- έχει οριζόντια ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των $x'x$.

● Συνάρτηση $f(x) = a^x, 0 < a < 1$

- έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .
- έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$.
Δηλαδή $a^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



- είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .
- η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον $y'g$ στο σημείο $A(0,1)$.
- έχει οριζόντια ασύμπτωτη το θετικό ημιάξονα των $x'x$.

● Αριθμός e

$e = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ κατά προσέγγιση η τιμή του e είναι: $e = 2,718$

● Ο νόμος της εκθετικής μεταβολής

$Q(t) = Q_0 e^{ct}$ όπου t ο χρόνος, $Q_0 = Q(0)$ (αρχική ποσότητα), c σταθερά.

Αν $c > 0$, έχουμε εκθετική αύξηση. Αν $c < 0$ έχουμε εκθετική απόσβεση.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

i) Οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = a^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ με $a > 0$, $a \neq 1$ έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς τον άξονα γ'γ.

ii) Αν $a > 0$ και $a \neq 1$, τότε

- $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- $a^{x_1} \neq a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$
- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
- $a^{x_1} < a^{x_2}$, τότε $x_1 < x_2$, ($a > 1$)
- $a^{x_1} < a^{x_2}$, τότε $x_1 > x_2$, ($0 < a < 1$)
- $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, τότε $f(x) < g(x)$, ($a > 1$)
- $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, τότε $f(x) > g(x)$, ($0 < a < 1$)

iii) Για $a > 1$, έχουμε $0 < a^x < 1$ με $x < 0$ και $a^x > 1$ με $x > 0$.

iv) Για $0 < a < 1$, έχουμε $a^x > 1$ με $x < 0$ και $0 < a^x < 1$ με $x > 0$.

v) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = a^x + \kappa$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = a^x$ με κατακόρυφη μετατόπιση κατά κ μονάδες (πάνω αν $\kappa > 0$ και κάτω αν $\kappa < 0$).

vi) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = a^{x-\kappa}$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $f(x) = a^x$ με οριζόντια μετατόπιση κατά κ μονάδες (δεξιά αν $\kappa > 0$ και αριστερά αν $\kappa < 0$).

vii) $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

viii) Για $a = 1$ η συνάρτηση $f(x) = a^x$ μετατρέπεται στη μορφή $f(x) = 1$ (σταθερή), η οποία δεν είναι εκθετική και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x.

xi) Εκθετική ονομάζουμε κάθε εξίσωση που περιέχει άγνωστο x ή συνάρτηση του αγνώστου x στον εκθέτη.

ix) Για τη λύση μιας **εκθετικής εξίσωσης ή ανίσωσης ή συστήματος** προσπαθούμε να φέρουμε και τα δύο μέλη σε μορφή δυνάμεων με την ίδια βάση.

x) Αν $(f(x))^{g(x)} = 1$, τότε $f(x) = 1$ και $g(x) \neq 0$ ή $g(x) = 0$ και $f(x) > 0$ ή $f(x) = -1$ και $g(x) = \text{άρτιος}$.

- xii) Η εξίσωση της μορφής $a^{f(x)} = 0$, είναι αδύνατη ($a > 0$).
- xiii) Για να λύσουμε **εκθετικές ανισώσεις** χρησιμοποιούμε τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης.
- xiv) Εξισώσεις μορφής $f(a^x) = g(\beta^x)$, όπου $0 < a, \beta \neq 1$, με αντικατάσταση: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y$ μετατρέπονται σε γνωστές μορφές.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

- i) Η συνάρτηση $f(x) = (a - 2)^x$ είναι γνησίως αύξουσα όταν:
- α) $a > 3$ β) $a < 2$ γ) $a > 0$ δ) $a \geq 3$
- ii) Η συνάρτηση $f(x) = (k^2 + 1)^x$, $k \in \mathbb{R}^*$ είναι:
- α) γνησίως αύξουσα β) γνησίως φθίνουσα γ) σταθερή
- iii) Οι συναρτήσεις $f(x) = a^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, έχουν κοινά σημεία:
- α) ένα β) δύο γ) κανένα δ) τρία
- iv) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι:
- α) $[0, +\infty)$ β) $(-\infty, +\infty)$ γ) $(0, +\infty)$ δ) $[1, +\infty)$
- v) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x$ διέρχεται από το σημείο:
- α) $A(1,0)$ β) $B(0,1)$ γ) $\Gamma(3,3)$ δ) $O(0,0)$
- vi) Το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = 5^x$ είναι:
- α) $[0, +\infty)$ β) $(-\infty, +\infty)$ γ) $(0, +\infty)$ δ) $[1, +\infty)$
- vii) Η εξίσωση $3^{x^2-2x} = -1$ έχει:
- α) μία λύση β) δύο λύσεις γ) άπειρες λύσεις δ) καμία λύση
- viii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ έχει ασύμπτωτη:
- α) το θετικό ημιάξονα των x β) τον αρνητικό ημιάξονα των x
 γ) το θετικό ημιάξονα των y δ) τον αρνητικό ημιάξονα των y
- ix) Η εξίσωση $10^x = -k^2 + 1$ έχει λύση αν:
- α) $k \in (-1,1)$ β) $k \in [-1,1]$ γ) $k \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ δ) $k \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

- x) Η ανίσωση $\sqrt{2}^x \geq 1$ έχει λύση:
- α) $x > 1$ β) $x \geq 0$ γ) $x < 1$ δ) $x \leq 1$
- xi) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2^{x+3}$ προκύπτει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = 2^x$ κατά:
- α) οριζόντια δεξιά 3 μονάδες β) οριζόντια αριστερά 3 μονάδες
 γ) κατακόρυφα πάνω 3 μονάδες δ) κατακόρυφα κάτω 3 μονάδες
- xii) Η γραφική παράσταση της $f(x) = 3^x - 4$ προκύπτει με μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = 3^x$ κατά:
- α) οριζόντια δεξιά 4 μονάδες β) οριζόντια αριστερά 4 μονάδες
 γ) κατακόρυφα πάνω 4 μονάδες δ) κατακόρυφα κάτω 4 μονάδες
- xiii) Η συνάρτηση $f(x) = a^{|x|}$ με $a > 1$ έχει ασύμπτωτη:
- α) το θετικό ημιάξονα των x β) τον αρνητικό ημιάξονα των x
 γ) το θετικό ημιάξονα των y δ) καμία ασύμπτωτη
- xiv) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, τότε ισχύει:
- α) $f(0) < f(4)$ β) $f(8) > f(13)$ γ) $f(3) \leq f(4)$ δ) $f(0) < f(5)$
- xv) Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ είναι:
- α) γνησίως φθίνουσα β) γνησίως αύξουσα γ) άρτια δ) περιττή

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- i) Αν $f(x) = 3^x$, τότε $f(-2) = 9$ Σ Λ
- ii) Η εξίσωση $x^4 + 5x - 8 = 0$, είναι εκθετική Σ Λ
- iii) Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα. Σ Λ
- iv) Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Σ Λ
- v) Η συνάρτηση $f(x) = (\sqrt{2})^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Σ Λ
- vi) Ισχύει: $3^{\sqrt{3}} > 3^2$ Σ Λ
- vii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = 10^x$ είναι το $(0, +\infty)$. Σ Λ

- viii) Το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x) = (\sqrt{3})^x$ είναι το $(0, +\infty)$. Σ Λ
- ix) Η συνάρτηση $f(x) = (-5)^x$ είναι εκθετική. Σ Λ
- x) Η συνάρτηση $f(x) = 2^x$ έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των x . Σ Λ
- xi) Αν έχουμε $3^{2x} = 3^{2y}$, τότε ισχύει: $x = y$ Σ Λ
- xii) Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ έχει ασύμπτωτη τον ημιάξονα Ox' . Σ Λ
- xiii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 10^x$ διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$. Σ Λ
- xiv) Για τη συνάρτηση $f(x) = 0,5^x$ ισχύει: αν $x > 0$, τότε $f(x) > 1$. Σ Λ
- xv) Για τη συνάρτηση $f(x) = 5^x$ ισχύει: αν $x > 0$, τότε $f(x) < 1$. Σ Λ
- xvi) Οι συναρτήσεις $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{-x}$ έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς τον άξονα των y . Σ Λ
- xvii) Η συνάρτηση $f(x) = (a^2 + 1)^x$ είναι εκθετική για $a = 0$. Σ Λ
- xviii) Η συνάρτηση $f(x) = e^{x+1}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Σ Λ
- xix) Η συνάρτηση $f(x) = 1^x$ είναι εκθετική. Σ Λ

3. Να διατάξετε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά:

- i) $\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 4$ ii) $3^{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}, 3^{-2}, \sqrt[5]{3^2}$
- iii) $\frac{1}{25}, \sqrt{5}, 5^{\frac{1}{5}}, \sqrt[3]{5^5}$ iv) $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

A ομάδα

- 4. Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{a^2 + 1}{a + 7}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} ;
- 5. Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{a + 3}{a - 4}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} ;
- 6. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\lambda + 8}{\lambda^2 - 4}\right)^x$ έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των x .

- 7.** Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{|\kappa| - 4}{\kappa + 1}\right)^x$ έχει ασύμπτωτη το θετικό ημιάξονα των x .
- 8.** Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \left(\frac{8a - a^3}{7}\right)^x$ να είναι σταθερή.
- 9.** Να βρείτε την εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο:
- α) $A(-3, \frac{1}{8})$ β) $B(-3, 27)$ γ) $\Gamma(2, 25)$
- 10.** Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων:
- α) $f(x) = 2^x$ β) $f_1(x) = 2^{x-2}$ γ) $f_2(x) = 2^{x+2}$
- 11.** Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων:
- α) $f(x) = 2^x$ β) $f_1(x) = 2^x + 1$ γ) $f_2(x) = 2^x - 3$
- 12.** Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων:
- α) $f(x) = 2^x$ β) $f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ γ) $f_2(x) = 2^{x-2} + 3$
- 13.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:
- α) $f(x) = 2^x$ β) $f(x) = 2^{x-3}$ γ) $f(x) = 2^x + 4$ δ) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 5$
- 14.** Αν $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ και $g(x) = 2^x - 2^{-x}$, να δείξετε ότι: $f^2(x) - g^2(x) = 4$
- 15.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων: $f(x) = 2^{x+1}$ και $g(x) = 32$.
- 16.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων: $f(x) = 8 \cdot 4^{x+1}$ και $g(x) = 8 + 15 \cdot 2^{x+2}$.
- 17.** Να λύσετε τις εξισώσεις:
- α) $2^{3x} = \frac{1}{32}$ β) $2^{2x+3} = 16^{x+3}$ γ) $(x^2 + x - 5)^{2x+8} = 1$
- δ) $4^{x^2-5x+5} = \frac{1}{4}$ ε) $3^{x^2-3x+2} = 1$ στ) $2^{x+3} - 2^{x+2} - 2^x = 48$

18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$$

$$\beta) 4^{x+1} = 2^{x+1} + 2$$

$$\gamma) 2 \cdot 16^x = 17 \cdot 4^x - 8$$

$$\delta) 3^{2x} + 12^x - 2 \cdot 4^{2x} = 0$$

19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 3^{x+2} - 2^{x+6} = 17 \cdot 2^x - 7 \cdot 3^x$$

$$\beta) 3^{x+3} - 2 \cdot 3^x = 5^{x+1} + 4 \cdot 5^x$$

$$\gamma) 16^x - 3 \cdot 8^x + 3 \cdot 2^{x+1} - 4 = 0$$

$$\delta) 3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$$

20. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) 3^{x^2-4x} > \frac{1}{27}$$

$$\beta) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} < \frac{1}{64}$$

$$\gamma) e^{2x} > e^3$$

$$\delta) 4^{3x} \geq \frac{1}{32}$$

21. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) \left(\frac{4}{9}\right)^{x+5} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{x+8}$$

$$\beta) \sqrt{3^{x+2}} > 27$$

$$\gamma) 6^{x+3} > 6^{3x-1}$$

$$\delta) (\sqrt{2} + 1)^x > 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\epsilon) 5^{3-|x|} > \frac{1}{5}$$

$$\sigma\tau) 2^{x^2+x} > \frac{1}{64}$$

22. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) 3 \cdot 9^x > 10 \cdot 3^x - 3$$

$$\beta) 2^x + 2 \leq 3\sqrt{2^x}$$

$$\gamma) \frac{2^{x+1} - 8}{x^2 - 7x + 6} \leq 0$$

$$\delta) 4^x + 2 \cdot 2^x - 8 \geq 0$$

23. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{και} \quad \beta = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

24. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 2^{x+3y} = \frac{1}{4} \\ 3^{5x-7} = 9^y \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 4^{4x-10} = 4^y \\ 5^{x-9} = 125^{-y} \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 2^{6x+7} = 32^{y+1} \\ 7 \cdot 7^{x-y} = 7^{2y+5} \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} \frac{3^{x-2}}{27} = 81^y \\ 5^{4x+24} = \frac{1}{25^{3y}} \end{cases}$$

25. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 3^x + 4^y = 7 \\ 2 \cdot 3^x - 4^y = 2 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 3 \cdot 2^x - 5 \cdot 3^y = -9 \\ 2 \cdot 2^x + 7 \cdot 3^y = 25 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 3^{x+y} = \frac{1}{9} \\ y^2 = -x \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} 2^x \cdot 4^{x+y} = 128 \\ 5^x \cdot 25^{y-x} = 125 \end{cases}$$

B ομάδα

26. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{4}{3^x - 27}$$

$$\beta) f(x) = \frac{5}{2^{x+2} - 2^x - 96}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{5}{\sqrt{3^{x+20}} + \sqrt{3^{x+28}} - 246}$$

$$\delta) f(x) = \frac{1}{3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} - 13}$$

$$\epsilon) f(x) = \frac{8^x + 1}{3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x}$$

27. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{3^x - 1}$$

$$\beta) f(x) = \sqrt{2 \cdot 25^x - 10^x - 4^x}$$

$$\gamma) f(x) = \sqrt{3^{4x-1} - 2^{4x-1}}$$

$$\delta) f(x) = \sqrt{5^{x^2-8x+7} - 1}$$

$$\epsilon) f(x) = \sqrt{2^{x^2+2} - 8}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \sqrt{16^{5x+1} - 8^{x+2}}$$

28. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x - 2 \cdot 4^x$$

$$\beta) 3^{2x+3} + 37 \cdot 9^x = 16^{x+1} + 11 \cdot 2^{4x}$$

$$\gamma) x^{x^2+4x+1} = x$$

$$\delta) x^{2x+4} = x^2$$

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^x$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 36$.

30. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 2^{\eta\mu^2 x} = \sqrt{2}$$

$$\beta) (\sqrt{5} - 2)^x + 1 = \frac{2}{(\sqrt{5} + 2)^x}$$

$$\gamma) 25^{\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}} - 30 = 0$$

$$\delta) 3^{\sigma\upsilon\nu^2 x} + 3^{\eta\mu^2 x} = 4$$

$$\epsilon) 3^{2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1} = 9$$

$$\sigma\tau) 5^{\frac{2}{x}-1} - 6 \cdot 5^{\frac{1}{x}-1} + 1 = 0$$

31. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 2^{\sqrt[4]{x}} = 16^{-3} \cdot 2^{\sqrt{x}}$$

$$\beta) 125^{\sigma\upsilon\nu x} \cdot 5^{\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}} = 625$$

$$\gamma) 2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$$

$$\delta) 7^{\sqrt{x-8}} \cdot 7^{\sqrt{x-2}} = 7^{\sqrt{2x-10}}$$

$$\epsilon) 8^{\epsilon\varphi^2 x} = 4 \cdot 4^{\eta\mu^2 x}$$

$$\sigma\tau) 5^{\sqrt{3} \eta\mu x} = 25^{\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}}$$

32. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x$ βρίσκονται κάτω από τα σημεία της ευθείας $\epsilon: y = -5$.

33. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) \sqrt{3^x} - 12\sqrt{3^{-x}} > -1$$

$$\beta) \frac{5^x + 7}{5^x + 1} < 2$$

$$\gamma) e^{4|x| - 5} < \frac{1}{e}$$

$$\delta) (3^{x+1} - \sqrt{3^5})(7^{x+1} - 49)(e^x + 1) \leq 0$$

34. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) 5^{x^3 + 6x + 2} > 5^{5x^2 + 2}$$

$$\beta) 6^{\sqrt{x}} + 6^{1-\sqrt{x}} \geq 7$$

$$\gamma) 2^{x^3} \cdot 2^{12x} \geq 16^{2x^2}$$

$$\delta) \sqrt[3]{2^{2x}} > \sqrt{8 \cdot 16^x}$$

35. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 12 \\ 3^y \cdot 2^x = 18 \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} 2^x + 2^y = 24 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 3^{x^2 - 6x + 3} = \frac{1}{9} \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} 2^x - 3^y = 1 \\ 12 \cdot 8^x + 9^y = 777 \end{cases}$$

$$\epsilon) \begin{cases} 2^x \cdot (x + y) = 8 \\ \sqrt{x + y} = 2 \end{cases}$$

$$\sigma\tau) \begin{cases} 3^x - 5^y = 2 \\ 27 \cdot 3^{-x} + 5^y = 26 \end{cases}$$

36. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση: $f(x) = \left(\frac{a-1}{5}\right)^x$

α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού a για τις οποίες η f ορίζεται σε όλο το \mathbb{R} .

β) Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Εάν $a = 11$, να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x+1) = 6$. (Πανελλήνιες Εξετάσεις)

37. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) [5^{(x^2 - 25)}]^{(x^2 - 4)} = 1 \quad \beta) e^{2x} + e = e^x + e^{x+1} \quad \gamma) (x^2 + x - 11)^{x^2 - 4x} = 1$$

$$\delta) 2^{\eta\mu 2x} - \sigma\upsilon\nu x = 4^{1 - 2\eta\mu \frac{x}{2}} \quad \epsilon) 3^{\eta\mu 2x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \sigma\tau) x \cdot 2^x - 8x + 3 \cdot 2^x - 24 = 0$$

38. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (2 - |a|)^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της f για τις διάφορες τιμές του a .

β) Για $a = -\frac{1}{2}$, να λύσετε την ανίσωση $f\left(\frac{e^{2x} + e^x}{e^x + e}\right) \leq f(1)$.

γ) Για $a = \frac{3}{2}$, να λύσετε την ανίσωση $f(\sqrt{x} - 2) < f(\sqrt{x - 12})$.

- 39.** Σε έναν ασθενή με πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία $\Theta(t)$ του ασθενούς t ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο $\Theta(t) = 41 - 2^t$ σε βαθμούς Κελσίου.
- α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.
β) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα φτάσει 37°C .
- 40.** Η αξία ενός καινούργιου αυτοκίνητου είναι 16.000 Ευρώ και μειώνεται κάθε χρόνο κατά 10% για έξι χρόνια.
- α) Να βρείτε τη συνάρτηση $A(t)$, (t χρόνος) που δίνει την τιμή του αυτοκίνητου στη διάρκεια των έξι ετών.
β) Ποια είναι η αξία του αυτοκίνητου σε δύο χρόνια από την αγορά του;
γ) Σε πόσα χρόνια από την αγορά του αυτοκίνητου η τιμή του θα είναι 11.664 Ευρώ;
- 41.** Να βρείτε την τιμή του a , ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = (\sqrt{2+7a})^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2a+2}}\right)^x$ να είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των y .
- 42.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 5^{2x+1} + 5^{2x-1} - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε την τιμή του λ αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, -520)$.
β) Για την τιμή του λ που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- 43.** Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f με τύπο:
- $$f(x) = \left(\frac{\lambda^3 - 8}{|\lambda| - 1}\right)^x, \text{ να ορίζεται για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- 44.** Να λύσετε τις εξισώσεις:
- α) $3^{x-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = \sqrt{\frac{1}{9^{4-x}}} + 207$ β) $(x-2) \cdot 9^{x-3} + (4x-14) \cdot 3^{x-3} - 24 = 0$
γ) $3^{\sqrt[3]{81}} - 10^{\sqrt[3]{9}} + 3 = 0$ δ) $(\sqrt[5]{3})^x + (\sqrt[10]{3})^{x-10} = 84$
- 45.** Να λύσετε τις ανισώσεις:
- α) $3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} > 0$ β) $16^x + 2 \cdot 12^x \leq 3^{2x+1}$
γ) $\frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1}$ δ) $(x-2)^{x^2-x} \geq (x-2)^{12}$
- 46.** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
- $$6^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 2 \text{ και } 2^{x^2} \leq 4 \cdot 2^x$$

47. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $3^x + 4^x = 5^x$ έχει μοναδική λύση τη $x = 2$.

48. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x + y = 6 \\ x^{y^2 - 7y + 12} = 1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x - y = 1 \\ 64^x - 56 \cdot 8^y = 8 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2 \\ 2^{x+1} - 3y = 43 \end{cases}$$

49. Αν ο χρόνος υποδιπλασιασμού ενός ραδιενεργού υλικού είναι 20 χρόνια και η αρχική ποσότητα του είναι 50gr.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει την εκθετική απόσβεση του υλικού.

β) Να υπολογίσετε την ποσότητα που θα μείνει μετά από 10 χρόνια.

γ) Να βρείτε σε πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει τα $\frac{50}{32}$ gr του υλικού.

50. α) Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f με τύπο: $f(x) = 2^{-x} - x^3 + 1$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $2^{-e^x - 4} - 2^{e^x - 6} < (e^x + 4)^3 + (e^x - 6)^3$

51. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \sqrt{-2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1}$

52. Ένας βιολόγος μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων παρατηρεί ότι:

α) 2 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 80.

β) 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 640.

Αν η συνάρτηση που δίνει τον αριθμό των βακτηρίων είναι $Q(t) = Q_0 \cdot 4^{ct}$ (t χρόνος σε ώρες), να βρεθεί η σταθερά c , ο αρχικός αριθμός των βακτηρίων, καθώς και ο χρόνος που απαιτείται για να υπερβεί ο αριθμός των βακτηρίων τα 5120.

53. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \left(\frac{\alpha+2}{5-\alpha}\right)^x$

α) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως φθίνουσα

β) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση f να είναι σταθερή

γ) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε να ισχύει: $f(3) - 3f(2) + f(1) = 3$

δ) Να βρείτε τις τιμές του x ώστε να ισχύει: $f(2x) + f(x) = 2$

54. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = (a - 3)^x$

α) Να βρείτε τις τιμές του a ώστε η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα

β) Για $a = 5$ να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = f(5x+8)$

γ) Για $a = 6$ να λυθεί η ανίσωση: $f(x^2) < f(x+2)$

ΤΕΣΤ 1^ο**ΘΕΜΑ 1^ο:** Α. Τι λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση a ;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- i) Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα. Σ Λ
- ii) Το πεδίο ορισμού της $f(x) = 2^x$ είναι το \mathbb{R}^* . Σ Λ
- iii) Η συνάρτηση $f(x) = (-a^2)^x$ είναι εκθετική ($a \in \mathbb{R}^*$). Σ Λ
- iv) Αν $f(x) = (1+a)^x$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $a = 0$. Σ Λ
- v) Αν $f(x) = 3^x$, τότε $f(-3) < f(-2)$ Σ Λ

ΘΕΜΑ 2^ο: Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 3 \cdot 2^x + \frac{24}{2^x} = \frac{36}{2^{x-1}} \qquad \beta) (\sqrt{3})^{x^2-x} = 27$$

ΤΕΣΤ 2^ο**ΘΕΜΑ 1^ο:** Α. Να συμπληρώσετε τα κενά:

i) Αν $2^{-k} = 4$, τότε $2^{3k} = \dots\dots$ ii) Αν $(\sqrt{2})^k = 32$, τότε $k = \dots\dots$

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

- i) Η συνάρτηση $f(x) = (a^2 + 1)^{|x|}$ είναι άρτια. Σ Λ
- ii) Αν $\left(\frac{1}{2}\right)^k < \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda$, τότε $k > \lambda$ Σ Λ
- iii) Η γραφική παράσταση της $f(x) = -2^x$ τέμνει τον άξονα των x . Σ Λ
- iv) Οι συναρτήσεις $f(x) = 5^x$, $g(x) = 5^{-x}$ είναι αντίθετες. Σ Λ
- v) Η συνάρτηση $g(x) = -3^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . Σ Λ

ΘΕΜΑ 2^ο: Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{2^{3x+2} - 16}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 4$.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \geq 4\sqrt{3}$.