1.32. Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n = 1, 2, 3, \ldots, 1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπ δο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση: $(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1)$

Να αποδείξετε ότι:

α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.

β) κατά την κίνηση τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου A;

γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x + y - 1 = 0$ στο σημείο A.

1.33. α) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ, ώστε η εξίσωση $\kappa(x^2 + 2y^2) + (y + x + 1)(y - x + 2) = 0$ να παριστάνει κύκλο.

β) Για τις διάφορες τιμές του κ να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

[Απ. α) κ=-2]

1.34. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\mu - 1)x - \mu y - 3 = 0$ (1).

α) Δείξτε ότι εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο (C) για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού μ.

β) Δείξτε ότι το σημείο $P(1,-1)$ ανήκει στον κύκλο (C).

γ) Βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ αν η χορδή που ορίζει η ευθεία (ε): $x - 2y - 2 = 0$ στον κύκλο (C) φαίνεται από το σημείο P υπό ορθή γωνία.

[Απ. μ=-5]

1.35. Δίνεται η εξίσωση $(1+\lambda)x^2 + (1+\lambda)y^2 - 2x - 2\lambda = 0$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο.

β) Δείξτε ότι για τις διάφορες τιμές του λ, οι κύκλοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία να προσδιορίσετε.

[Απ. α) $\lambda \neq -1$ β) (1,1) και (1,-1)]

1.36. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - \lambda x - \lambda y = 0$ (1) και η ευθεία ε: $y = x + 3$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο.

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ ώστε η ευθεία ε να τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η χορδή που ορίζεται από την τομή της ε και του κύκλου να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

[Απ. α) $\lambda \neq 0$ β) $\lambda<-3$ ή $\lambda>3$ γ) Δεν υπάρχει]

1.37. Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα σημεία $A(2\lambda-3, 0)$ και $B(0, \lambda+6)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση και το είδος της καμπύλης πάνω στην οποία κινούνται τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου, έτσι ώστε το τμήμα AB να φαίνεται από αυτά υπό ορθή γωνία.

β) Δείξτε ότι όλες οι καμπύλες του ερωτήματος α) διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία να προσδιορίσετε.

[Απ. α) $x^2+y^2+(3-2\lambda)x-(\lambda+6)y=0$ β) (0,0), (-3,6)]

1.38. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2\kappa x + \kappa^2 - 2 = 0$.

α) Δείξτε ότι εξίσωση παριστάνει πάντα κύκλο. Να βρείτε την ακτίνα του και το γεωμετρικό τόπο του κέντρου του.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: $x - y = 3$ είναι κοινή εφαπτομένη σε δύο κύκλους που προκύπτουν από την εξίσωση.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτόμενης που διέρχεται από το σημείο στο οποίο η ε τέμνει τον άξονα $x'x$.