

[Απ. α) $\rho = \sqrt{2}$, $\gamma = 0$ γ) $x + \gamma = 3$]

1.39. Θεωρούμε τις εξισώσεις $C: x^2 + y^2 + \lambda x - 1 = 0$ και $\varepsilon: y = \lambda x$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση C παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του λ .
- Να δείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C σε δύο σημεία A και B .
- Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης που διαγράφει το μέσο της χορδής AB .

[Απ. β) $\gamma = 0$ δ) $x^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$]

1.40. Δίνεται ο κύκλος $C: (x+2)^2 + (y-4)^2 = 5$. Να βρείτε τα σημεία του κύκλου που απέχουν τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

[Απ. $A(-1, 2)$, $B(-3, 6)$]

1.41. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, για τα οποία ισχύει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων τους από τα σημεία $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(0,4)$ ισούται με 68.

[Απ. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$]

1.42. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου, που το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων τους από τις ευθείες $\varepsilon_1: 2x + y - 7 = 0$ και $\varepsilon_2: x - 2y - 1 = 0$ ισούται με 40.

[Απ. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 40$]

1.43. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1: x^2 + y^2 + 6y + 8 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 - 12x - 10y - 60 = 0$.

- Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο σημείο P του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.
- Να βρείτε την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης ε στο P .

[Απ. i) $P(-\frac{3}{5}, -\frac{13}{5})$ ii) $\varepsilon: 3x + 4y + 17 = 0$]

1.44. Θεωρούμε τον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$.

- Ποια είναι τα σημεία τομής του κύκλου με τον άξονα $y'y$;
- Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου στα παραπάνω σημεία.
- Δείξτε ότι οι προηγούμενες εφαπτόμενες τέμνονται σε σημείο του άξονα $x'x$.

[Απ. i) $A(0, 2)$, $B(0, -2)$ ii) $x + 2y - 4 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$]

1.45. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$.

- Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στον άξονα $y'y$.
- Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.

[Απ. α) $x = 1, x = -5$ β) $\gamma = 2, \gamma = 0$]

1.46. Δίνεται ο κύκλος $C: (x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon: x + y = 3$.

[Απ. $x + y + 2 = 0$, $x + y + 6 = 0$]

1.47. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία $\varepsilon: x - 2y - 6 = 0$.

[Απ. $2x + y + 9 = 0$, $2x + y - 11 = 0$]

1.48. Δίνεται ο κύκλος $C: (x + 2)^2 + y^2 = 2$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες σχηματίζουν γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.