Φ26

Εργασίες

1) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y)$.
Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

2) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ και $f(0) \neq 0$
Να δείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

3) Έστω f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $\alpha, \beta > 0$ ισχύει: $f(\alpha \cdot \beta) = \alpha f(\beta) + \beta f(\alpha)$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$

4) Οι συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \to [\alpha, \beta]$ είναι συνεχείς και έχουν σύνολο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ με $(f \circ g)(\xi) + (g \circ f)(\xi) = 2\xi$

5) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$: $f(\xi) = \dfrac{f(0)}{2} + \dfrac{f(1)}{3} + \dfrac{f(2)}{6}$

6) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, 4]$ με $f(1) > 0$ και $f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) = 8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1, 4]$ με $f(\xi) = \xi$.

7) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = x + e^x$. Να αποδείξετε ότι:
α) f γνησίως αύξουσα β) f συνεχής
γ) Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν ένα κοινό σημείο στο διάστημα $(1, 3)$.